

Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo

5.1 INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores presentamos la transformada de Laplace y la transformada z para convertir las señales en el dominio del tiempo en representaciones en el dominio s y el dominio z complejos que son, para muchos propósitos, más convenientes para analizar y procesar. Además, mediante estas transformaciones se proporciona mayor conocimiento acerca de la naturaleza y las propiedades de muchas señales y sistemas. En este capítulo y en el siguiente presentaremos otras transformaciones conocidas como la serie de Fourier y la transformada de Fourier, las cuales convierten señales en el dominio del tiempo en representaciones en el dominio de la frecuencia (o *espectrales*). Además de proporcionar las representaciones espectrales de las señales, el análisis de Fourier también es esencial para describir ciertos tipos de sistemas y sus propiedades en el dominio de la frecuencia. En este capítulo nos introduciremos en el análisis de Fourier en el contexto de las señales y sistemas de tiempo continuo.

5.2 REPRESENTACIÓN EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

A. SEÑALES PERIÓDICAS

En el capítulo 1 definimos una señal de tiempo continuo $x(t)$ como periódica si existe un valor positivo distinto de cero T para el cual

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{para toda } t \quad (5.1)$$

El periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (5.1) se satisface, y $1/T_0 = f_0$ se conoce como *frecuencia fundamental*.

Dos ejemplos básicos de señales periódicas son la señal senoidal real

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.2)$$

y la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (5.3)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ se conoce como *frecuencia angular fundamental*.

B. REPRESENTACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EXPONENCIAL COMPLEJA

La representación de la serie de Fourier exponencial compleja de una señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental T_0 está dada por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.4)$$

donde c_k se conocen como *coeficientes complejos de Fourier* y están dados por

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.5)$$

donde \int_{T_0} denota la integral sobre cualquier periodo y por lo regular se utilizan los intervalos 0 hasta T_0 o $-T_0/2$ hasta $T_0/2$ para la integración. Al establecer $k = 0$ en la ecuación (5.5) tenemos que

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (5.6)$$

lo cual indica que c_0 es igual al valor promedio de $x(t)$ sobre un periodo.

Cuando $x(t)$ es real, entonces de la ecuación (5.5) se deriva que

$$c_{-k} = c_k^* \quad (5.7)$$

donde el asterisco indica el complejo conjugado.

C. SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA

La representación de la serie de Fourier trigonométrica de una señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental T_0 está dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sen k\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.8)$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier dados por

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (5.9a)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sen k\omega_0 t dt \quad (5.9b)$$

Los coeficientes a_k y b_k y los coeficientes de Fourier complejos c_k se encuentran relacionados por (problema 5.3)

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = j(c_k - c_{-k}) \quad (5.10)$$

De la ecuación (5.10) obtenemos

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad (5.11)$$

Cuando $x(t)$ es real, entonces a_k y b_k son reales, y por la ecuación (5.10) tenemos que

$$a_k = 2 \operatorname{Re}[c_k] \quad b_k = -2 \operatorname{Im}[c_k] \quad (5.12)$$

SEÑALES PARES E IMPARES

Si una señal periódica $x(t)$ es par, entonces $b_k = 0$ y su serie de Fourier (5.8) contiene únicamente los términos coseno:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.13)$$

Si $x(t)$ es impar, entonces $a_k = 0$ y su serie de Fourier contiene sólo términos seno:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sen k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.14)$$

D. SERIE DE FOURIER EN FORMA ARMÓNICA

Otra forma de la representación en serie de Fourier de una señal periódica real $x(t)$ con periodo fundamental T_0 es

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) puede derivarse de la ecuación (5.8) y se conoce como serie de Fourier *en forma armónica* de $x(t)$. El término C_0 se conoce como *componente de cd*, mientras que el término $C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$ se denomina *k-ésima componente armónica* de $x(t)$. La primera componente armónica $C_1 \cos(\omega_0 t - \theta_1)$ se conoce comúnmente como *componente fundamental* debido a que tiene el mismo periodo fundamental que $x(t)$. Los coeficientes C_k y los ángulos θ_k son las *amplitudes* y los *ángulos de fase de las armónicas*, respectivamente, y están relacionados con los coeficientes de Fourier a_k y b_k por medio de

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \theta_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} \quad (5.16)$$

Para una señal periódica real $x(t)$, la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas como los de la ecuación (5.4) es matemáticamente equivalente a cualesquiera de las dos formas en las ecuaciones (5.8) y (5.15). Aunque las últimas dos son formas comunes para la serie de Fourier, la forma compleja en la ecuación (5.4) es más general y, por lo general, más conveniente; utilizaremos esa forma casi de manera exclusiva.

E. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Se sabe que una señal periódica $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier si satisface las siguientes condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es absolutamente integrable sobre cualquier periodo; esto es,

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (5.17)$$

2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t .
3. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t , y cada una de estas discontinuidades es finita.

Observe que las condiciones de Dirichlet son suficientes, pero no necesarias para la representación en serie de Fourier (problema 5.8).

F. ESPECTROS DE AMPLITUD Y DE FASE DE UNA SEÑAL PERIÓDICA

Expresemos a los coeficientes complejos de Fourier c_k en la ecuación (5.4) de la siguiente manera:

$$c_k = |c_k| e^{j\phi_k} \quad (5.18)$$

A una gráfica de $|c_k|$ contra la frecuencia angular ω se le llama *espectro de amplitud* de la señal periódica $x(t)$, y a una gráfica de ϕ_k contra ω se le conoce como *espectro de fase* de $x(t)$. Puesto que el índice k supone solamente enteros, los espectros de amplitud y de fase no son curvas continuas sino que aparecen sólo como frecuencias discretas $k\omega_0$. Por tanto, se les conoce como *espectro de frecuencias discretas* o *espectro de líneas*.

Para una señal periódica real $x(t)$ tenemos que $c_{-k} = c_k^*$. De este modo,

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \phi_{-k} = -\phi_k \quad (5.19)$$

Por tanto, el espectro de amplitud es una función par de ω , y el espectro de fase es una función impar de ω para una señal periódica real.

G. CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA SEÑAL PERIÓDICA

En el capítulo 1 (problema 1.18) introdujimos la potencia promedio de una señal periódica $x(t)$ sobre un periodo como

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \quad (5.20)$$

Si $x(t)$ está representada mediante la serie de Fourier exponencial compleja en la ecuación (5.4), entonces puede demostrarse que (problema 5.14)

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (5.21)$$

La ecuación (5.21) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la serie de Fourier.

5.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A. DE LA SERIE DE FOURIER A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $x(t)$ una señal no periódica de duración finita; es decir,

$$x(t) = 0 \quad |t| > T_1$$

En la figura 5-1a) se ilustra una señal de este tipo. Sea $x_{T_0}(t)$ una señal periódica formada al repetir $x(t)$ con periodo fundamental T_0 como se muestra en la figura 5-1b). Si hacemos que $T_0 \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad (5.22)$$

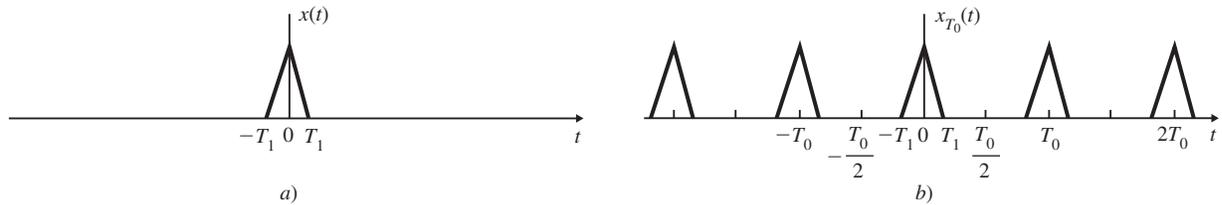


Figura 5-1 a) Señal no periódica $x(t)$; b) señal periódica formada por extensión periódica de $x(t)$.

La serie de Fourier exponencial compleja de $x_{T_0}(t)$ está dada por

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.23)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.24a)$$

Puesto que $x_{T_0}(t) = x(t)$ para $|t| < T_0/2$ y también $x(t) = 0$ fuera de este intervalo, la ecuación (5.24a) puede volver a escribirse como

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.24b)$$

Definamos $X(\omega)$ como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.25)$$

Entonces, de la ecuación (5.24b), los coeficientes complejos de Fourier c_k pueden expresarse como

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (5.26)$$

Sustituyendo la ecuación (5.26) en la ecuación (5.23), tenemos que

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

o

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (5.27)$$

A medida que $T_0 \rightarrow \infty$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ se convierte en infinitesimal ($\omega_0 \rightarrow 0$). De este modo, sea $\omega_0 = \Delta\omega$. Entonces la ecuación (5.27) se convierte en

$$x_{T_0}(t)|_{T_0 \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (5.28)$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (5.29)$$

La suma del lado derecho de la ecuación (5.29) puede visualizarse como el área bajo la función $X(\omega)e^{j\omega t}$, como se muestra en la figura 5-2. Por tanto, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.30)$$

lo cual es la representación de Fourier de una señal $x(t)$ no periódica.

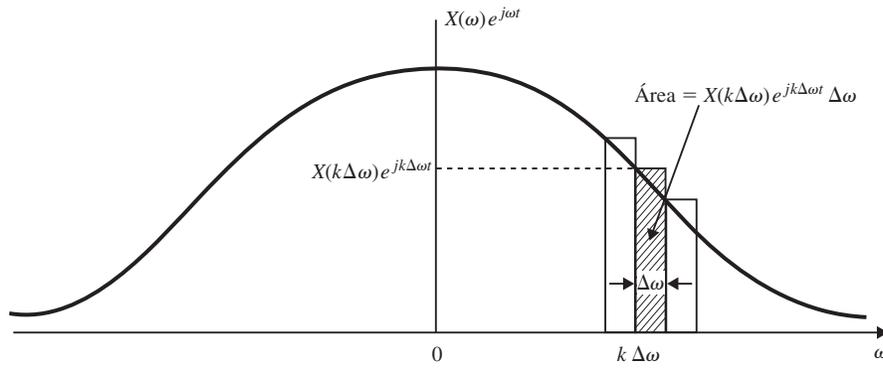


Figura 5-2 Interpretación gráfica de la ecuación (5.29).

B. PAR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La función $X(\omega)$ definida por la ecuación (5.25) se conoce como *transformada de Fourier* de $x(t)$, mientras que la ecuación (5.30) define la *transformada de Fourier inversa* de $X(\omega)$. De manera simbólica se denotan mediante

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \quad (5.31)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.32)$$

y decimos que $x(t)$ y $X(\omega)$ forman un par de transformadas de Fourier denotado por

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad (5.33)$$

C. ESPECTRO DE FOURIER

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ es, en general, compleja, y puede expresarse como

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (5.34)$$

Por analogía con la terminología utilizada para los coeficientes complejos de Fourier de una señal periódica $x(t)$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de una señal no periódica $x(t)$ es la especificación en el dominio de la frecuencia de $x(t)$ y se hace referencia a ella como *espectro* (o *espectro de Fourier*) de $x(t)$. La cantidad $|X(\omega)|$ se conoce como *espectro de magnitud* de $x(t)$, mientras que $\phi(\omega)$ se denomina *espectro de fase* de $x(t)$.

Si $x(t)$ es una señal real, entonces de la ecuación (5.31) obtenemos

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \quad (5.35)$$

Entonces se deriva que $X(-\omega) = X^*(\omega)$ **(5.36a)**

y $|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad \phi(-\omega) = -\phi(\omega)$ **(5.36b)**

Por tanto, como en el caso de las señales periódicas, el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ es una función par y el espectro de fase $\phi(\omega)$ es una función par de ω .

D. CONVERGENCIA DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Del mismo modo que en el caso de las señales periódicas, las condiciones suficientes para la convergencia de $X(\omega)$ son las siguientes (de nueva cuenta, se hace referencia a ellas como las condiciones de Dirichlet):

1. $x(t)$ es absolutamente integrable; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{(5.37)}$$

2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
3. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, y cada una de estas discontinuidades es finita.

Aunque las condiciones de Dirichlet anteriores garantizan la existencia de la transformada de Fourier para una señal, si se permiten las funciones impulso en la transformada, las señales que no satisfacen estas condiciones pueden tener transformadas de Fourier (problema 5.23).

E. CONEXIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La ecuación (5.31) define la transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{(5.38)}$$

La transformada de Laplace bilateral de $x(t)$, como se define en la ecuación (4.3), está dada por

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{(5.39)}$$

Comparando las ecuaciones (5.38) y (5.39), observamos que la transformada de Fourier es un caso especial de la transformada de Laplace en la cual $s = j\omega$; esto es,

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \text{(5.40)}$$

Si establecemos $s = \sigma + j\omega$ en la ecuación (5.39) tenemos que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

o $X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$ **(5.41)**

lo que indica que la transformada bilateral de Laplace de $x(t)$ puede interpretarse como la transformada de Fourier de $x(t) e^{-\sigma t}$.

Puesto que la transformada de Laplace puede considerarse una generalización de la transformada de Fourier en la cual la frecuencia está generalizada de $j\omega$ a $s = \sigma + j\omega$, la variable compleja s a menudo se conoce como *frecuencia compleja*.

Observe que puesto que la integral en la ecuación (5.39) está denotada por $X(s)$, la integral en la ecuación (5.38) puede denotarse como $X(j\omega)$. De este modo, en el resto de este libro tanto $X(\omega)$ como $X(j\omega)$ significarán lo mismo si asociamos la transformada de Fourier con la transformada de Laplace. Debido a que la transformada de Fourier es la transformada de Laplace con $s = j\omega$, no debe suponerse automáticamente que la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ es la transformada de Laplace con s reemplazada con $j\omega$. Si $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir, si $x(t)$ satisface la condición (5.37), la transformada de Fourier de $x(t)$ puede obtenerse de la transformada de Laplace de $x(t)$ con $s = j\omega$. Esto no es cierto en general en señales que no son absolutamente integrables. Los siguientes ejemplos ilustran los enunciados anteriores.

EJEMPLO 5.1 Considere la función impulso unitario $\delta(t)$.

De la ecuación (3.13), la transformada de Laplace de $\delta(t)$ es

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \text{para toda } s \quad (5.42)$$

Por las definiciones (5.31) y (1.20), la transformada de Fourier de $\delta(t)$ es

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (5.43)$$

De este modo, la transformada de Laplace y la transformada de Fourier de $\delta(t)$ son la misma.

EJEMPLO 5.2 Considere la señal exponencial

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0$$

De la ecuación (3.8), la transformada de Laplace de $x(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a \quad (5.44)$$

Por la definición (5.31), la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned} \quad (5.45)$$

De esta forma, al comparar las ecuaciones (5.44) y (5.45) tenemos

$$X(\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5.46)$$

Observe que $x(t)$ es absolutamente integrable.

EJEMPLO 5.3 Considere la función escalón unitario $u(t)$.

De la ecuación (3.14), la transformada de Laplace de $u(t)$ es

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (5.47)$$

La transformada de Fourier de $u(t)$ está dada por (problema 5.30)

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5.48)$$

De esta manera, la transformada de Fourier de $u(t)$ no puede obtenerse a partir de su transformada de Laplace. Observe que la función escalón unitario $u(t)$ no es absolutamente integrable.

5.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Las propiedades básicas de la transformada de Fourier se presentan en la siguiente discusión. Muchas de estas propiedades son semejantes a las correspondientes a la transformada de Laplace (véase la sección 3.4).

A. LINEALIDAD

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (5.49)$$

B. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (5.50)$$

La ecuación (5.50) muestra que el efecto de un desplazamiento en el dominio del tiempo sólo implica agregar un término lineal $-j\omega t_0$ al espectro de fase original $\theta(\omega)$. Esto se conoce como *desplazamiento de fase lineal* de la transformada de Fourier $X(\omega)$.

C. DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (5.51)$$

En ocasiones, la multiplicación de $x(t)$ por una señal exponencial compleja $e^{j\omega_0 t}$ se llama *modulación compleja*. De este modo, la ecuación (5.51) muestra que la modulación compleja en el dominio del tiempo corresponde a un desplazamiento de $X(\omega)$ en el dominio de la frecuencia. Observe que la propiedad de desplazamiento en la frecuencia [ecuación (5.51)] es la propiedad dual de desplazamiento en el tiempo [ecuación (5.50)].

D. ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.52)$$

donde a es una constante real. Esta propiedad se obtiene directamente de la definición de la transformada de Fourier. La ecuación (5.52) indica que al escalar la variable de tiempo t por el factor a provoca un escalamiento inverso de la variable de frecuencia ω por $1/a$, y un escalamiento en amplitud de $X(\omega/a)$ por $1/|a|$. De este modo, la propiedad de escalamiento (5.52) implica que la compresión en el tiempo de una señal ($a > 1$) produce su expansión espectral, y la expansión en el tiempo de la señal ($a < 1$) produce su compresión espectral.

E. INVERSIÓN DEL TIEMPO

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \quad (5.53)$$

De este modo, la inversión del tiempo de $x(t)$ produce una inversión semejante del eje de la frecuencia para $X(\omega)$. La ecuación (5.53) se obtiene fácilmente al establecer $a = -1$ en la ecuación (5.52).

F. DUALIDAD (O SIMETRÍA)

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (5.54)$$

La propiedad de dualidad de la transformada de Fourier tiene implicaciones significativas. Esta propiedad nos permite obtener ambos pares de transformadas de Fourier a partir de una evaluación de la ecuación (5.31) (problemas 5.20 y 5.22).

G. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (5.55)$$

La ecuación (5.55) muestra que el efecto de la diferenciación en el dominio del tiempo es la multiplicación de $X(\omega)$ por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia (problema 5.28).

H. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (5.56)$$

La ecuación (5.56) es la propiedad dual de la ecuación (5.55).

I. INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (5.57)$$

Puesto que la integración es la inversa de la diferenciación, la ecuación (5.57) muestra que la operación en el dominio de la frecuencia correspondiente a la integración en el dominio del tiempo es la multiplicación por $1/j\omega$, pero se necesita un término adicional para explicar un posible componente de cd en la salida del integrador. Por consiguiente, a menos que $X(0) = 0$, se produce un componente de cd por el integrador (problema 5.33).

J. CONVOLUCIÓN

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \quad (5.58)$$

La ecuación (5.58) se conoce como *teorema de convolución del tiempo*, y establece que la convolución en el dominio del tiempo se convierte en multiplicación en el dominio de la frecuencia (problema 5.31). Como en el caso de la transformada de Laplace, esta propiedad de convolución juega un papel importante en el estudio de los sistemas LIT de tiempo continuo (sección 5.5) y también forma el fundamento para nuestra discusión de filtros (sección 5.6).

K. MULTIPLICACIÓN

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (5.59)$$

La propiedad de multiplicación (5.59) es la propiedad dual de la ecuación (5.58) y se conoce a menudo como *teorema de convolución de la frecuencia*. De esta forma, la multiplicación en el dominio del tiempo se convierte en la convolución en el dominio de la frecuencia (problema 5.35).

L. PROPIEDADES ADICIONALES

Si $x(t)$ es real, sea

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (5.60)$$

donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son las componentes par e impar de $x(t)$, respectivamente. Sea

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Entonces

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (5.61a)$$

$$x_e(t) \leftrightarrow \text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \quad (5.61b)$$

$$x_o(t) \leftrightarrow j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \quad (5.61c)$$

La ecuación (5.61a) es la condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real (problema 5.39). Las ecuaciones (5.61b) y (5.61c) muestran que la transformada de Fourier de una señal par es una función real de ω y que la transformada de Fourier de una señal impar es una función imaginaria pura de ω .

M. RELACIONES DE PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda) d\lambda \quad (5.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega \quad (5.63)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5.64)$$

La ecuación (5.64) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la transformada de Fourier. Observe que la cantidad en el lado izquierdo de la ecuación (5.64) es el contenido de energía normalizada E de $x(t)$ [ecuación (1.14)]. La identidad de Parseval nos dice que este contenido de energía E puede calcularse al integrar $|X(\omega)|^2$ sobre todas las frecuencias ω . Por esta razón, a menudo se conoce a $|X(\omega)|^2$ como *espectro de densidad de energía* de $x(t)$, y la ecuación (5.64) también se conoce como *teorema de la energía*.

La tabla 5-1 contiene un resumen de las propiedades de la transformada de Fourier que se presentan en esta sección. En la tabla 5-2 se proporcionan algunas señales comunes y sus transformadas de Fourier.

Tabla 5-1 Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en la frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversión del tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Diferenciación en la frecuencia	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Señal real	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ $X(-\omega) = X^*(\omega)$
Componente par	$x_e(t)$	$\text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega)$
Componente impar	$x_o(t)$	$j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega)$
Relaciones de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda) d\lambda$ $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$	

Tabla 5-2 Pares comunes de transformadas de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen } \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$e^{-a \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\text{sen } \omega a}{\omega a}$
$\frac{\text{sen } at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
$\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

5.5 LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

A. RESPUESTA EN FRECUENCIA

En la sección 2.2 demostramos que la salida $y(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo es igual a la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$; es decir,

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.65)$$

Al aplicar la propiedad de convolución (5.58) obtenemos

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (5.66)$$

donde $Y(\omega)$, $X(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $y(t)$, $x(t)$ y $h(t)$, respectivamente. De la ecuación (5.66) tenemos que

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (5.67)$$

La función $H(\omega)$ se conoce como *respuesta en frecuencia* del sistema. Las relaciones representadas mediante las ecuaciones (5.65) y (5.66) se ilustran en la figura 5-3. Sea

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)} \quad (5.68)$$

Entonces $|H(\omega)|$ se denomina *respuesta de magnitud* del sistema, y $\theta_H(\omega)$ *respuesta de fase* del sistema.

Considere la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (5.69)$$

con transformada de Fourier (problema 5.23)

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.70)$$

Entonces, de las ecuaciones (5.66) y (1.26) tenemos que

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \quad (5.71)$$

Al tomar la transformada de Fourier inversa de $Y(\omega)$ obtenemos

$$y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} \quad (5.72)$$

lo cual indica que la señal exponencial compleja $e^{j\omega_0 t}$ es una función propia del sistema LIT con un valor propio correspondiente $H(\omega_0)$, como se observó previamente en el capítulo 2 (sección 2.4 y problema 2.17). Además, por la propiedad de linealidad (5.49), si la entrada $x(t)$ es periódica con la serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.73)$$

entonces la salida $y(t)$ correspondiente también es periódica con la serie de Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (5.74)$$

Si $x(t)$ no es periódica, entonces de la ecuación (5.30)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.75)$$

y mediante la ecuación (5.66), la salida correspondiente $y(t)$ puede expresarse como

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.76)$$

De este modo, el comportamiento de un sistema LIT de tiempo continuo en el dominio de la frecuencia está completamente caracterizado por su respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Sea

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta_X(\omega)} \quad Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{j\theta_Y(\omega)} \quad (5.77)$$

Entonces, de la ecuación (5.66) tenemos que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (5.78a)$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega) + \theta_H(\omega) \quad (5.78b)$$

Por consiguiente, el espectro de magnitud $|X(\omega)|$ de la entrada se multiplica por la respuesta de magnitud $|H(\omega)|$ del sistema para determinar el espectro de magnitud $|Y(\omega)|$ de la salida, y la respuesta de fase $\theta_H(\omega)$ se suma al espectro de fase $\theta_X(\omega)$ de la entrada para producir el espectro de fase $\theta_Y(\omega)$ de la salida. La respuesta de magnitud $|H(\omega)|$ se conoce a menudo como *ganancia* del sistema.

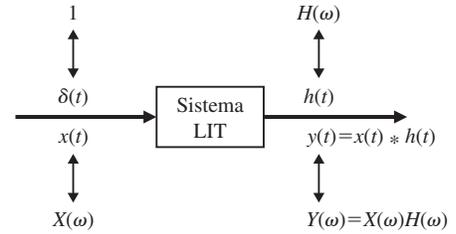


Figura 5-3 Relaciones entre entradas y salidas en un sistema LIT.

B. TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

Para transmitir sin distorsión a través de un sistema LIT necesitamos que la forma exacta de la señal de entrada se reproduzca en la salida, aunque su amplitud puede ser diferente y estar atrasada en el tiempo. Por tanto, si $x(t)$ es la señal de entrada, la salida necesaria es

$$y(t) = Kx(t - t_d) \quad (5.79)$$

donde t_d es el *atraso en el tiempo* (*time delay*) y $K (> 0)$ es una *constante de ganancia*. Esto se ilustra en la figura 5-4a) y b). Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (5.79) obtenemos

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_d} X(\omega) \quad (5.80)$$

De esta forma, de la ecuación (5.66) observamos que para una transmisión sin distorsión el sistema debe tener

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d} \quad (5.81)$$

$$\text{De este modo,} \quad |H(\omega)| = K \quad (5.82a)$$

$$\theta_H(\omega) = -j\omega t_d \quad (5.82b)$$

Es decir, la amplitud de $H(\omega)$ debe ser constante sobre todo el intervalo de frecuencias, mientras que la fase de $H(\omega)$ debe ser lineal con la frecuencia. Esto se ilustra en la figura 5-4c) y d).

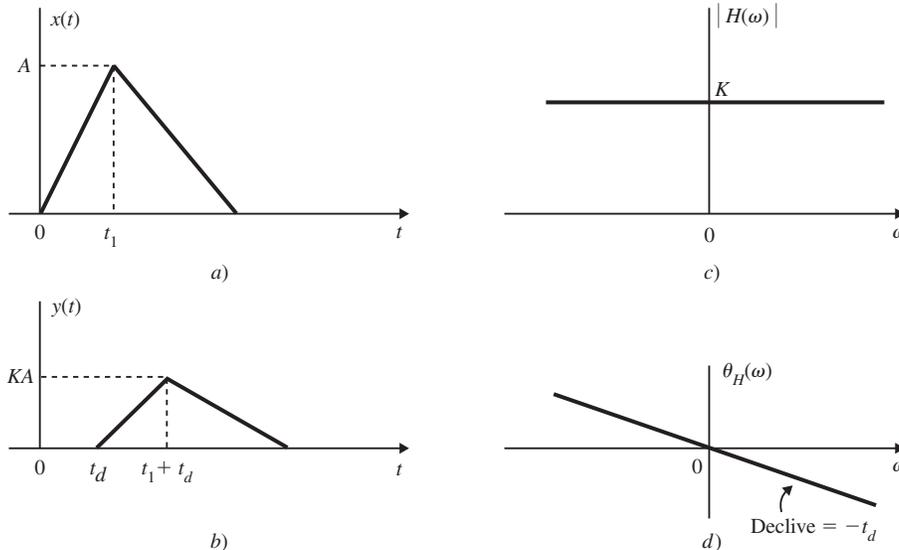


Figura 5-4 Transmisión sin distorsión.

DISTORSIÓN DE AMPLITUD Y DISTORSIÓN DE FASE

Cuando el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ del sistema no es constante dentro de la banda de frecuencia de interés, los componentes de frecuencia de la señal de entrada se transmiten con una cantidad diferente de ganancia o atenuación. Este efecto se denomina *distorsión de amplitud*. Cuando el espectro de fase $\theta_H(\omega)$ del sistema no es lineal con la frecuencia, la señal de salida tiene una forma de onda diferente de la señal de entrada debido a los diferentes retardos al pasar a través del sistema por los diferentes componentes de frecuencia de la señal de entrada. Esta forma de distorsión se denomina *distorsión de fase*.

C. SISTEMAS LIT CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Como se discutió en la sección 2.5, muchos sistemas LIT de tiempo continuo de interés práctico se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (5.83)$$

con $M \leq N$. Cuando tomamos la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (5.83) y por medio de la propiedad de linealidad (5.49) y la propiedad de diferenciación en el tiempo (5.55), tenemos que

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$\text{o} \quad Y(\omega) \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \quad (5.84)$$

De este modo, de la ecuación (5.67)

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (5.85)$$

que es una función racional de ω . El resultado (5.85) es el mismo que el de la contraparte de la transformada de Laplace $H(s) = Y(s)/X(s)$ con $s = j\omega$ [ecuación (3.40)]; es decir,

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

5.6 FILTRADO

Una de las operaciones fundamentales en cualquier sistema de procesamiento de señales es el *filtrado*; éste es el proceso mediante el cual las amplitudes relativas de los componentes de frecuencia en una señal se modifican o quizá algunos componentes de frecuencia se suprimen. Como vimos en la sección precedente, para los sistemas LIT de tiempo continuo el espectro de la salida es igual al de la entrada multiplicado por la respuesta en frecuencia del sistema. Por tanto, un sistema LIT actúa como filtro sobre la señal de entrada. Aquí la palabra “filtro” se utiliza para denotar un sistema que exhibe alguna clase de comportamiento selectivo de frecuencias.

A. FILTROS IDEALES DE FRECUENCIA SELECTIVA

Un filtro *ideal* de frecuencia selectiva es aquel que permite el paso exacto de señales en un determinado intervalo de frecuencias y rechaza completamente el resto. La banda de frecuencias que pasa por el filtro se conoce como *banda de paso* o *pasa-banda*, mientras que la banda de frecuencias rechazadas por el filtro se denomina *banda de rechazo* o *supresora de banda*.

Los tipos más comunes de filtros de frecuencia selectiva son los siguientes:

1. FILTRO IDEAL PASA-BAJAS

Un filtro ideal pasa-bajas (LPF, *low-pass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.86)$$

el cual se muestra en la figura 5-5a). La frecuencia ω_c se conoce como frecuencia de *corte*.

2. FILTRO IDEAL PASA-ALTAS

Un filtro ideal pasa-altas (HPF, *high-pass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.87)$$

el cual se muestra en la figura 5-5b).

3. FILTRO IDEAL PASA-BANDA

Un filtro ideal pasa-banda (BPF, *bandpass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.88)$$

el cual se muestra en la figura 5-5c).

4. FILTRO IDEAL SUPRESOR DE BANDA

Un filtro ideal supresor de banda (BSF, *bandstop filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 1 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.89)$$

el cual se muestra en la figura 5-5d).

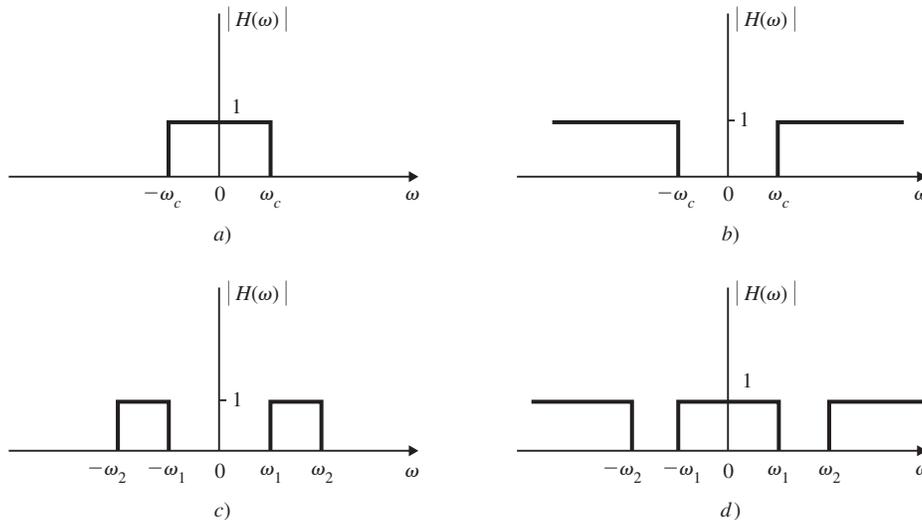


Figura 5-5 Respuestas de magnitud de filtros ideales de frecuencia selectiva.

En la discusión anterior no mencionamos nada sobre la respuesta de fase de los filtros. Para evitar la distorsión de fase en el proceso de filtrado, un filtro debe tener una característica de fase lineal sobre la banda de paso del filtro; esto es [ecuación (5.82b)],

$$\theta_H(\omega) = -\omega t_d \quad (5.90)$$

donde t_d es una constante.

Observe que todos los filtros ideales de frecuencia selectiva son sistemas no causales.

B. FILTROS NO IDEALES DE FRECUENCIA SELECTIVA

Consideraremos el filtro RC mostrado en la figura 5-6a) como un ejemplo de un filtro simple de frecuencia selectiva causal de tiempo continuo. La salida $y(t)$ y la entrada $x(t)$ están relacionadas mediante (problema 1.32)

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Tomando las transformadas de Fourier de ambos lados de la ecuación anterior, la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC está dada por

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (5.91)$$

donde $\omega_0 = 1/RC$. De esta manera, la respuesta de amplitud $|H(\omega)|$ y la respuesta de fase $\theta_H(\omega)$ están dadas por

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega/\omega_0|} = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}} \quad (5.92)$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.93)$$

lo que se grafica en la figura 5-6b). De la figura 5-6b) observamos que la red RC en la figura 5-6a) actúa como un filtro pasa-bajas.

5.7 ANCHO DE BANDA

A. ANCHO DE BANDA DEL FILTRO (O SISTEMA)

Un concepto importante en el análisis de sistemas es el *ancho de banda* de un sistema LIT. Existen muchas definiciones diferentes del ancho de banda del sistema.

1. ANCHO DE BANDA ABSOLUTO

El ancho de banda W_B de un filtro ideal pasa-bajas es igual a su frecuencia de corte; es decir, $W_B = \omega_c$ [figura 5-5a)]. En este caso W_B se denomina *ancho de banda absoluto*. El ancho de banda absoluto de un filtro pasa-bandas ideal está dado por $W_B = \omega_2 - \omega_1$ [figura 5-5c)]. Un filtro pasa-bandas se denomina de *banda estrecha* si $W_B \ll \omega_0$, donde $\omega_0 = 1/2(\omega_1 + \omega_2)$ es la frecuencia central del filtro. No se define ningún ancho de banda para un filtro pasa-altas o un filtro supresor de banda.

2. ANCHO DE BANDA DE 3 dB (O POTENCIA MEDIA)

Para filtros causales o prácticos, una definición común del ancho de banda del filtro (o del sistema) es el ancho de banda de 3 dB, W_{3dB} . En el caso de un filtro pasa-bajas, tal como el filtro RC descrito por la ecuación (5.92) o el de la figura 5-6b), W_{3dB} se define como la frecuencia positiva a la cual el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ cae a un valor igual a $|H(0)|/\sqrt{2}$, como se ilustra en la figura 5-7a). Note que $|H(0)|$ es el valor pico de $H(\omega)$ para el filtro pasa-bajas RC. El ancho de banda de 3 dB también se conoce como *ancho de banda de media potencia* porque una atenuación de voltaje o de corriente de 3 dB es equivalente a una atenuación de potencia por un factor de 2. En el caso de un filtro pasa-bandas, W_{3dB} se define como la diferencia entre las frecuencias a las cuales $|H(\omega)|$ cae a un valor igual a $1/\sqrt{2}$ veces el valor pico $|H(\omega_m)|$, como se ilustra en la figura 5-7b). Esta definición de W_{3dB} es útil para sistemas con respuesta de amplitud unimodal (en el rango de frecuencias positivo) y es un criterio ampliamente aceptado para medir el ancho de banda de un sistema, pero puede llegar a ser ambiguo y no único con sistemas que tengan múltiples respuestas de amplitud pico.

Observe que cada una de las definiciones precedentes de ancho de banda se definen sólo a lo largo del eje de frecuencias positivo y siempre definen sólo el ancho de banda de frecuencia positiva, o de un lado.

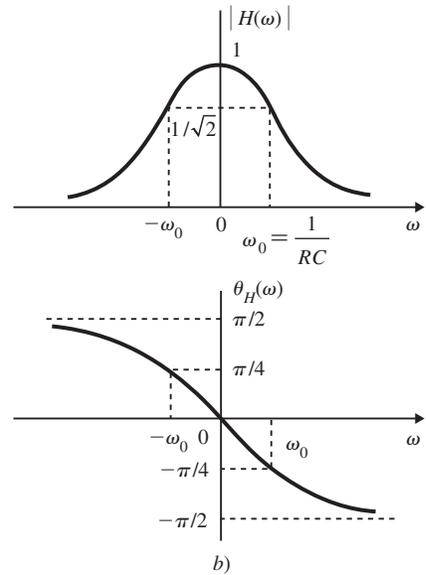
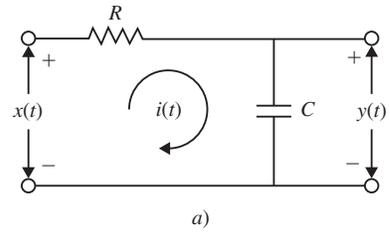


Figura 5-6 Filtro RC y su respuesta en frecuencia.

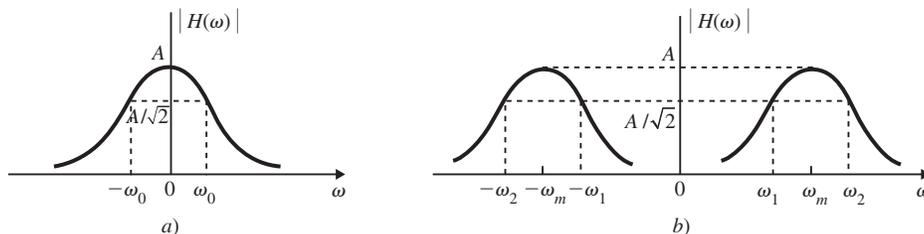


Figura 5-7 Ancho de banda del filtro.

B. ANCHO DE BANDA DE LA SEÑAL

El *ancho de banda* de una señal puede definirse como el intervalo de frecuencias positivas en el cual se encuentra “la mayoría” de la energía o la potencia. Esta definición es muy ambigua y está sujeta a varias convenciones (problemas 5.57 y 5.76).

ANCHO DE BANDA DE 3 dB

El ancho de banda de una señal $x(t)$ también puede definirse en un fundamento semejante al del ancho de banda de un filtro tal como el ancho de banda de 3 dB, a través del espectro de magnitud $|X(\omega)|$ de la señal. En realidad, si reemplazamos $|H(\omega)|$ por $|X(\omega)|$ en la figura 5-5a) a c), obtendremos gráficas en el dominio de la frecuencia de señales *pasa-bajas*, *pasa-altas* y *supresora de banda*.

SEÑAL LIMITADA EN BANDA

Una señal $x(t)$ se denomina señal de *banda limitada* si

$$|X(\omega)| = 0 \quad |\omega| > \omega_M \quad (5.94)$$

De este modo, para una señal de banda limitada es natural definir ω_M como el ancho de banda.

PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE DE FOURIER

5.1. A un conjunto de señales $\{\Psi_n(t)\}$ se le denomina *ortogonal* sobre cualquier intervalo (a, b) si cualesquiera dos señales en el conjunto $\Psi_m(t)$ y $\Psi_k(t)$ satisfacen la condición

$$\int_a^b \Psi_m(t) \Psi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \quad (5.95)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado y $\alpha \neq 0$. Demuestre que el conjunto de exponenciales complejas $\{e^{jk\omega_0 t}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es ortogonal en cualquier intervalo sobre un periodo T_0 , donde $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Para cualquier t_0 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dt &= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t} \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0} (e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t_0} (e^{jm2\pi} - 1) = 0 \quad m \neq 0 \end{aligned} \quad (5.96)$$

puesto que $e^{jm2\pi} = 1$. Cuando $m = 0$, tenemos que $e^{jm\omega_0 t} \Big|_{m=0} = 1$ y

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0 \quad (5.97)$$

De este modo, de las ecuaciones (5.96) y (5.97) concluimos que

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jk\omega_0 t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ T_0 & m = k \end{cases} \quad (5.98)$$

lo que demuestra que el conjunto $\{e^{jk\omega_0 t}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo sobre un periodo T_0 .

5.2. Mediante la condición de ortogonalidad (5.98), derive la ecuación (5.5) para los coeficientes complejos de Fourier.

De la ecuación (5.4)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $e^{-jm\omega_0 t}$ e integrar el resultado desde t_0 hasta $(t_0 + T_0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (5.99)$$

Entonces, por la ecuación (5.98), la ecuación (5.99) se reduce a

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = c_m T_0 \quad (5.100)$$

Al cambiar el índice m a k obtenemos la ecuación (5.5); es decir,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.101)$$

Utilizaremos en su mayoría los siguientes dos casos especiales para la ecuación (5.101): $t_0 = 0$ y $t_0 = -T_0/2$, respectivamente. Esto es,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.102a)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.102b)$$

5.3. Derive la serie de Fourier trigonométrica de la ecuación (5.8) a partir de la serie de Fourier exponencial compleja de la ecuación (5.4).

Reacomodamos la sumatoria en la ecuación (5.4) como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t})$$

y por medio de las fórmulas de Euler

$$e^{\pm jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t \pm j \operatorname{sen} k\omega_0 t$$

tenemos que
$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k}) \cos k\omega_0 t + j(c_k - c_{-k}) \operatorname{sen} k\omega_0 t] \quad (5.103)$$

Establecemos
$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_k + c_{-k} = a_k \quad j(c_k - c_{-k}) = b_k \quad (5.104)$$

La ecuación (5.103) se convierte en

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t)$$

5.4. Determine la representación de la serie de Fourier exponencial compleja para cada una de las siguientes señales:

a) $x(t) = \cos \omega_0 t$

b) $x(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$

c) $x(t) = \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$

d) $x(t) = \cos 4t + \operatorname{sen} 6t$

e) $x(t) = \operatorname{sen}^2 t$

a) En vez de utilizar la ecuación (5.5) para evaluar los coeficientes complejos de Fourier c_k a través de la fórmula de Euler, obtenemos

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

De este modo, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos \omega_0 t$ son

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_k = 0, |k| \neq 1$$

b) De manera similar tenemos que

$$\operatorname{sen} \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

De esta forma, los coeficientes complejos de Fourier para $\operatorname{sen} \omega_0 t$ son

$$c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_k = 0, |k| \neq 1$$

c) La frecuencia fundamental angular ω_0 de $x(t)$ es 2. De esta forma,

$$x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} (e^{j(2t+\pi/4)} + e^{-j(2t+\pi/4)}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} e^{-j2t} + \frac{1}{2} e^{j\pi/4} e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

De este modo, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos(2t + \pi/4)$ son

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} e^{j\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{1+j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1+j) \\ c_{-1} &= \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1-j) \\ c_k &= 0 \quad |k| \neq 1 \end{aligned}$$

d) Por el resultado del problema 1.14, el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es π y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$. De esta manera,

$$x(t) = \cos 4t + \operatorname{sen} 4t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

De nuevo, mediante la fórmula de Euler, tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 4t + \operatorname{sen} 6t = \frac{1}{2} (e^{j4t} + e^{-j4t}) + \frac{1}{2j} (e^{j6t} - e^{-j6t}) \\ &= -\frac{1}{2j} e^{-j6t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2j} e^{j6t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

Así, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos 4t + \operatorname{sen} 6t$ son

$$c_{-3} = -\frac{1}{2j} \quad c_{-2} = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{1}{2j}$$

y todos los otros $c_k = 0$.

e) Del problema 1.16e) el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es π y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$. De este modo,

$$x(t) = \operatorname{sen}^2 t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

Nuevamente, utilizando la fórmula de Euler, obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{sen}^2 t = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{j2t} - 2 + e^{-j2t}) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-j2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

De esta forma, los coeficientes complejos de Fourier para $\text{sen}^2 t$ son

$$c_{-1} = -\frac{1}{4} \quad c_0 = \frac{1}{2} \quad c_1 = -\frac{1}{4}$$

mientras que todos los otros $c_k = 0$.

5.5. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ mostrada en la figura 5-8.

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

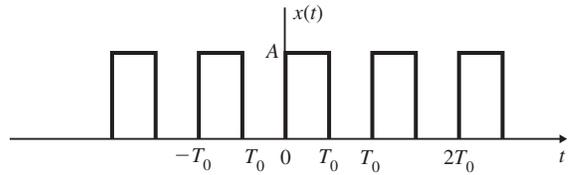


Figura 5-8

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Mediante la ecuación (5.102a) tenemos que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} (e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1) \\ &= \frac{A}{jk2\pi} (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk2\pi} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

puesto que $\omega_0 T_0 = 2\pi$ y $e^{-jk\pi} = (-1)^k$. De este modo,

$$c_k = 0 \quad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \quad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A}{2}$$

Por consiguiente,

$$c_0 = \frac{A}{2} \quad c_{2m} = 0 \quad c_{2m+1} = \frac{A}{j(2m+1)\pi} \tag{5.105}$$

y obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.106}$$

b) De las ecuaciones (5.105), (5.10) y (5.12) tenemos

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \quad a_{2m} = b_{2m} = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2 \text{Re}[c_{2m+1}] = 0 \quad b_{2m+1} = -2 \text{Im}[c_{2m+1}] = \frac{2A}{(2m+1)\pi}$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \tag{5.107}$$

5.6. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ ilustrada en la figura 5-9.

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

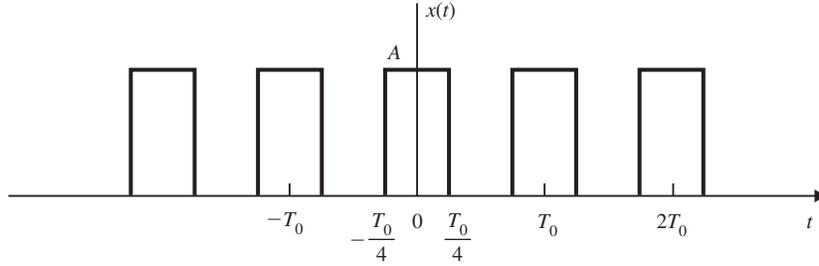


Figura 5-9

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Mediante la ecuación (5.102b) tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} (e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{jk\omega_0 T_0/4}) \\ &= \frac{A}{-jk2\pi} (e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}) = \frac{A}{k\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

De este modo,

$$c_k = 0 \quad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = (-1)^m \frac{A}{k\pi} \quad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A}{2}$$

Por consiguiente,
$$c_0 = \frac{A}{2} \quad c_{2m} = 0, m \neq 0 \quad c_{2m+1} = (-1)^m \frac{A}{(2m+1)\pi} \quad (5.108)$$

y obtenemos que

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.109)$$

b) De las ecuaciones (5.108), (5.10) y (5.12) tenemos

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \quad a_{2m} = 2 \operatorname{Re}[c_{2m}] = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2 \operatorname{Re}[c_{2m+1}] = (-1)^m \frac{2A}{(2m+1)\pi} \quad b_k = -2 \operatorname{Im}[c_k] = 0$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right) \end{aligned} \quad (5.110)$$

Observe que $x(t)$ es par; de este modo, $x(t)$ contiene sólo un término de cd y términos coseno. También note que en la figura 5-9 $x(t)$ puede obtenerse al desplazar $x(t)$ en la figura 5-8 hacia la izquierda por el término $T_0/4$.

5.7. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ ilustrada en la figura 5-10.

- Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

Observe que $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = x_1(t) - A$$

donde $x(t)$ se muestra en la figura 5-11. Ahora, al comparar las figuras 5-11 y 5-8 en el problema 5.5 observamos que $x_1(t)$ es la misma onda cuadrada de $x(t)$ en la figura 5-8, con excepción que A se convierte en $2A$.

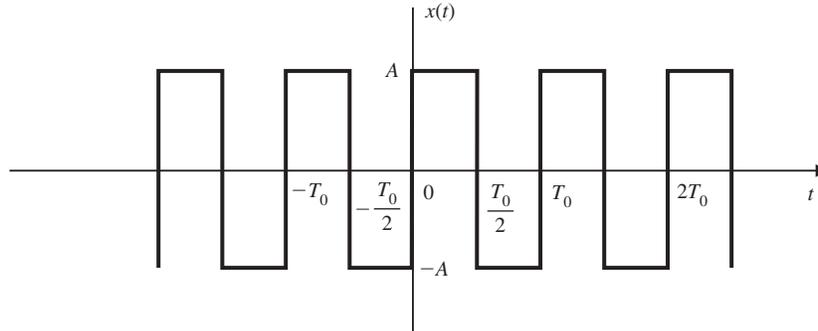


Figura 5-10

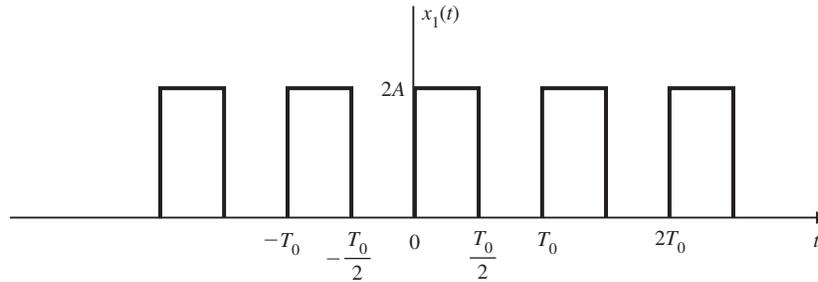


Figura 5-11

a) Si reemplazamos A por $2A$ en la ecuación (5.106) tenemos que

$$x_1(t) = A + \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

De esta manera,

$$x(t) = x_1(t) - A = \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.111}$$

b) De forma semejante, reemplazando A por $2A$ en la ecuación (5.107) tenemos que

$$x_1(t) = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t$$

Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{4A}{\pi} \left(\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \tag{5.112}$$

Observe que $x(t)$ es impar; de esta manera, $x(t)$ sólo contiene términos seno.

5.8. Considere el tren de impulsos periódicos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado en la figura 5-12 y definido por

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \tag{5.113}$$

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $\delta_{T_0}(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $\delta_{T_0}(t)$.

a) Sea
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

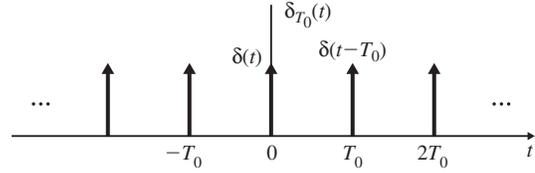


Figura 5-12

Puesto que $\delta(t)$ se encuentra involucrada, utilizaremos la ecuación (5.102b) para determinar los coeficientes de Fourier y obtener

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \tag{5.114}$$

Por tanto, obtenemos

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.115}$$

b) Sea
$$\delta_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sen k\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Puesto que $\delta_{T_0}(t)$ es par, $b_k = 0$, y por la ecuación (5.9a), a_k está dado por

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \tag{5.116}$$

De este modo, obtenemos

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.117}$$

5.9. Considere la onda triangular $x(t)$ ilustrada en la figura 5-13a). Mediante la técnica de diferenciación, encuentre a) la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$, y b) la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

Como se muestra en la figura 5-13b), la derivada $x'(t)$ de la onda triangular $x(t)$ es una onda cuadrada.

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.118}$$

Al diferenciar de la ecuación (5.118) obtenemos

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.119}$$

La ecuación (5.119) muestra que los coeficientes complejos de Fourier de $x'(t)$ son iguales a $jk\omega_0 c_k$. De este modo, podemos encontrar c_k ($k \neq 0$) si se conocen los coeficientes de Fourier de $x'(t)$. El término c_0 no puede determinarse mediante la ecuación (5.119) y debe evaluarse directamente en términos de $x(t)$ con la ecuación (5.6). Al comparar la figura 5-13b) y la figura 5-10 observamos que $x'(t)$ en la figura 5-13b) es la misma que $x(t)$ en la figura 5-10 con A reemplazada por $2A/T_0$. Por consiguiente, de la ecuación (5.111), al reemplazar A por $2A/T_0$ tenemos que

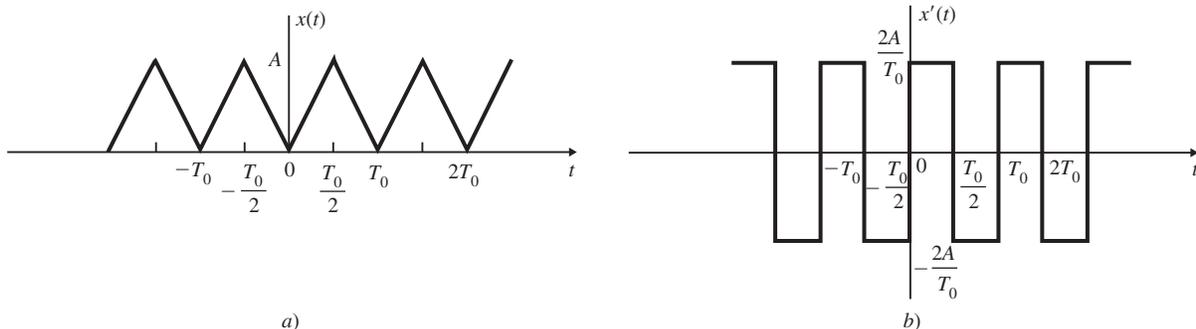


Figura 5-13

$$x'(t) = \frac{4A}{j\pi T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.120)$$

Al igualar las ecuaciones (5.119) y (5.120) tenemos que

$$\begin{aligned} c_k &= 0 & k &= 2m \neq 0 \\ jk\omega_0 c_k &= \frac{4A}{j\pi k T_0} & \text{o} & \quad c_k = -\frac{2A}{\pi^2 k^2} & k &= 2m+1 \end{aligned}$$

De la figura 5-13a) y la ecuación (5.6) tenemos

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (5.118) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.121)$$

b) De manera similar, al diferenciar la ecuación (5.8) obtenemos

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 (b_k \cos k\omega_0 t - a_k \sin k\omega_0 t) \quad (5.122)$$

La ecuación (5.122) muestra que los coeficientes coseno de Fourier de $x'(t)$ son iguales a $k\omega_0 b_k$ y que los coeficientes seno son iguales a $-k\omega_0 a_k$. Por tanto, de la ecuación (5.112), al reemplazar A por $2A/T_0$, tenemos que

$$x'(t) = \frac{8A}{\pi T_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t \quad (5.123)$$

Al igualar las ecuaciones (5.122) y (5.123) tenemos que

$$\begin{aligned} b_k &= 0 & a_k &= 0 & k &= 2m \neq 0 \\ -k\omega_0 a_k &= \frac{8A}{\pi k T_0} & \text{o} & \quad a_k = -\frac{4A}{\pi^2 k^2} & k &= 2m+1 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (5.6) y (5.10) y de la figura 5-13a) llegamos a

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\omega_0 t \quad (5.124)$$

5.10. Considere la onda triangular $x(t)$ ilustrada en la figura 5-14a). Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$ por medio de la técnica de diferenciación.

De la figura 5-14a), la derivada $x'(t)$ de la onda triangular $x(t)$ es, como se ilustra en la figura 5-14b),

$$x'(t) = -\frac{A}{T_0} + A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (5.125)$$

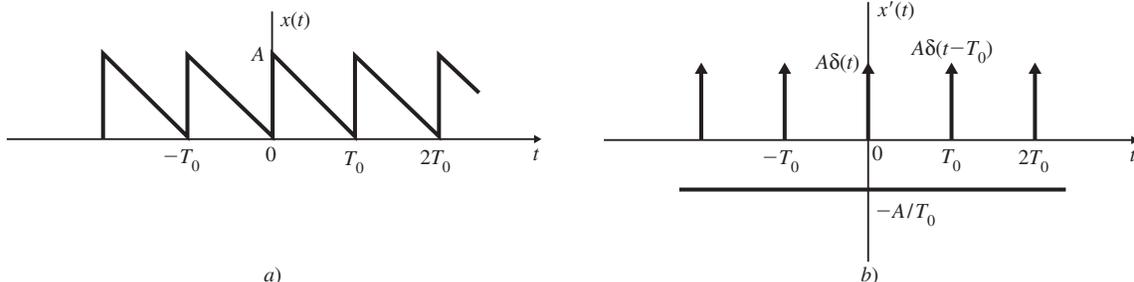


Figura 5-14

Mediante las ecuaciones (5.117) y (5.125) llegamos a

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{T_0} \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.126)$$

Si igualamos las ecuaciones (5.126) y (5.122) tenemos

$$a_k = 0, \quad k \neq 0 \quad k\omega_0 b_k = \frac{2A}{T_0} \quad \text{o} \quad b_k = \frac{A}{k\pi}$$

De la figura 5-14a) y la ecuación (5.9a) tenemos

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

De este modo, si sustituimos estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen } k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.127)$$

5.11. Encuentre y grafique el espectro de magnitud para la señal del tren de pulsos cuadrados periódico $x(t)$ mostrado en la figura 5-15a) para a) $d = T_0/4$, y b) $d = T_0/8$.

Mediante la ecuación (5.102a) tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_0^d e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^d = \frac{A}{T_0} \frac{1}{jk\omega_0} (1 - e^{-jk\omega_0 d}) \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2} (e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}) \\ &= A \frac{d}{T_0} \frac{\text{sen}(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2} \end{aligned} \quad (5.128)$$

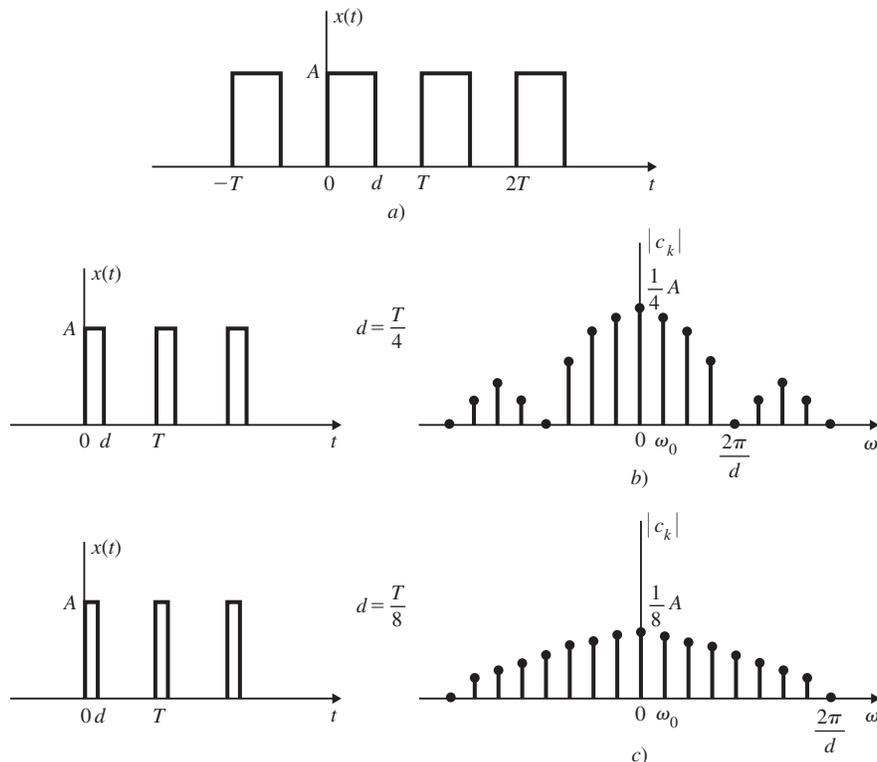


Figura 5-15

Observe que $c_k = 0$ siempre que $k\omega_0 d/2 = m\pi$, es decir,

$$n\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a) $d = T_0/4, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4,$

$$|c_k| = \frac{A}{4} \left| \frac{\text{sen}(k\pi/4)}{k\pi/4} \right|$$

El espectro de magnitud para este caso se ilustra en la figura 5-15b).

b) $d = T_0/8, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8,$

$$|c_k| = \frac{A}{8} \left| \frac{\text{sen}(k\pi/8)}{k\pi/8} \right|$$

El espectro de magnitud para este caso se ilustra en la figura 5-15c).

5.12. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales periódicas con un periodo fundamental T_0 y sus expresiones en series complejas de Fourier son

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

demuestre que la señal $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ es periódica con el mismo periodo fundamental T_0 y puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

donde c_k está dada por

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \tag{5.129}$$

Ahora

$$x(t + T_0) = x_1(t + T_0)x_2(t + T_0) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

De este modo, $x(t)$ es periódica con un periodo fundamental T_0 . Sea

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t} \right) x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t) e^{-j(k-m)\omega_0 t} dt \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \end{aligned}$$

puesto que

$$e_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

y el término entre corchetes es igual a e_{k-m} .

5.13. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales periódicas en el problema 5.12. Demuestre que

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} \tag{5.130}$$

La ecuación (5.130) se conoce como *relación de Parseval* para señales periódicas.

Del problema 5.12 y la ecuación (5.129) tenemos que

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}$$

Si establecemos $k = 0$ en la expresión anterior obtenemos

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k}$$

5.14. Verifique la identidad de Parseval (5.21) para la serie de Fourier; es decir,

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Si
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

entonces
$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad (5.131)$$

donde * denota el complejo conjugado. La ecuación (5.131) indica que si los coeficientes de Fourier de $x(t)$ son c_k , entonces los coeficientes de Fourier de $x^*(t)$ son c_{-k}^* . Al establecer $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x^*(t)$ en la ecuación (5.130) tenemos que $d_k = c_k$ y $e_k = c_{-k}^*$ (o $e_{-k} = c_k^*$), y obtenemos

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \quad (5.132)$$

o
$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

5.15. a) La convolución periódica $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ se definió en el problema 2.8. Si d_n y e_n son coeficientes complejos de Fourier de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, entonces demuestre que los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ están dados por

$$c_k = T_0 d_k e_k \quad (5.133)$$

donde T_0 es el periodo fundamental común a $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $f(t)$.

b) Encuentre la serie de Fourier exponencial compleja de $f(t)$ definida en el problema 2.8c).

a) De la ecuación (2.70) (problema 2.8)

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

Sea
$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}$$

Entonces
$$f(t) = \int_0^{T_0} x(\tau) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0(t-\tau)} \right) d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \int_0^{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

Puesto que
$$d_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

obtenemos
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 d_k e_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.134)$$

lo que demuestra que los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ son iguales a $T_0 d_k e_k$.

b) En el problema 2.8c), $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, como se muestra en la figura 2-12, que es lo mismo que la figura 5-8 (problema 5.5). De la ecuación (5.105) tenemos que

$$d_0 = e_0 = \frac{A}{2} \quad d_k = e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ A/jk\pi & k = 2m + 1 \end{cases}$$

De este modo, por la ecuación (5.133) los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ son

$$c_0 = T_0 d_0 e_0 = T_0 \frac{A^2}{4}$$

$$c_k = T_0 d_k e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2 / k^2 \pi^2 & k = 2m + 1 \end{cases}$$

Observe que en el problema 2.8c), $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$, mostrado en la figura 2-13b), es proporcional a $x(t)$, mostrada en la figura 5-13a). De esta manera, si reemplazamos A por $A^2 T_0 / 2$ en el resultado del problema 5.9 obtenemos que

$$c_0 = T_0 \frac{A^2}{4} \quad c_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2 / k^2 \pi^2 & k = 2m + 1 \end{cases}$$

los cuales son los mismos resultados obtenidos al utilizar la ecuación (5.133).

TRANSFORMADA DE FOURIER

5.16. a) Verifique la propiedad de desplazamiento en el tiempo (5.50); esto es,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{j\omega t_0} X(\omega)$$

Por la definición (5.31)
$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Mediante el cambio de variable $\tau = t - t_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

5.17. Verifique la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (5.51); es decir,

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Por la definición (5.31),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

5.18. Verifique la propiedad de dualidad (5.54); esto es,

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

De la definición de la transformada de Fourier inversa (5.32) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi x(t)$$

Al cambiar t a $-t$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi x(-t)$$

Ahora, al intercambiar t y ω obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi x(-\omega)$$

Puesto que

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

concluimos que

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

5.19. Encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso rectangular $x(t)$ [figura 5-16a)] definida por

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad (5.135)$$

Por la definición (5.31)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega} = 2a \frac{\text{sen } \omega a}{a}$$

Por tanto, obtenemos

$$p_a(t) \leftrightarrow 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega} = 2a \frac{\text{sen } \omega a}{\omega a} \quad (5.136)$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se grafica en la figura 5-16b).

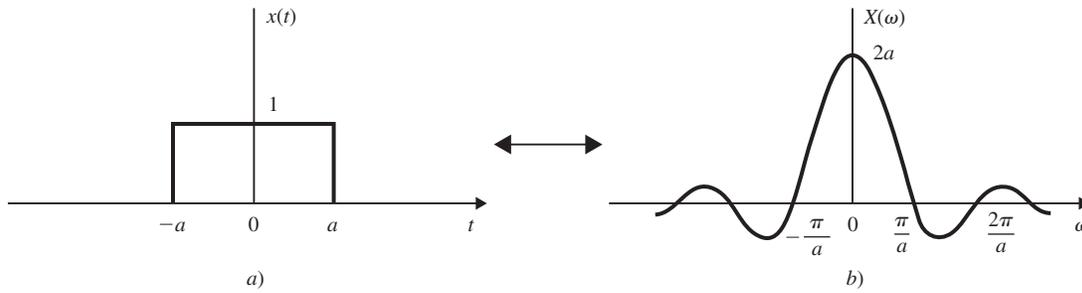


Figura 5-16 Pulso rectangular y su transformada de Fourier.

5.20. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-17a)]

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

De la ecuación (5.136) tenemos que

$$p_a(t) \leftrightarrow 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega}$$

Ahora, por la propiedad de dualidad (5.54), tenemos

$$2 \frac{\text{sen } at}{t} \leftrightarrow 2\pi p_a(-\omega)$$

Si dividimos ambos lados entre 2π (y por la propiedad de linealidad) obtenemos

$$\frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(-\omega) = p_a(\omega) \quad (5.137)$$

donde $p_a(\omega)$ está definida por [véanse la ecuación (5.135) y la figura 5-17b)]

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

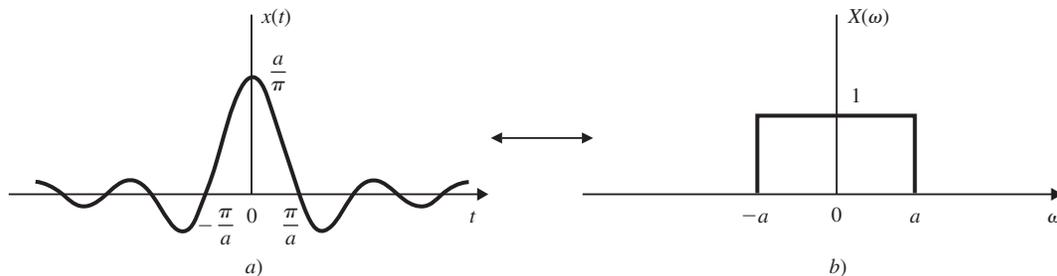


Figura 5-17 $\text{Sen } at/\pi t$ y su transformada de Fourier.

5.21. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-18a)]

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

La señal $x(t)$ puede volver a escribirse como

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{5.138}$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se muestra en la figura 5-18b).

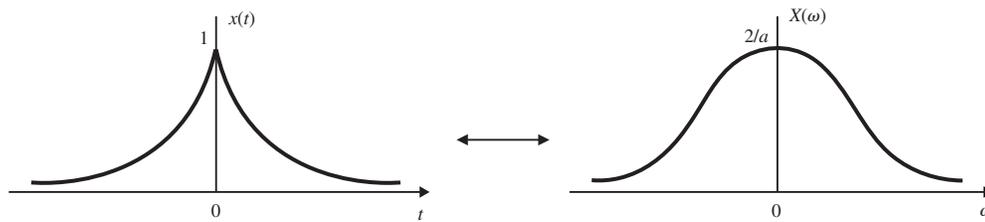


Figura 5-18 $e^{-a|t|}$ y su transformada de Fourier.

5.22. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-19a)]

$$x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

De la ecuación (5.138) tenemos que

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Ahora, por la propiedad de dualidad (5.54) tenemos que

$$\frac{2a}{a^2 + t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

Si dividimos ambos lados entre $2a$, obtenemos

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \tag{5.139}$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se muestra en la figura 5-19b).

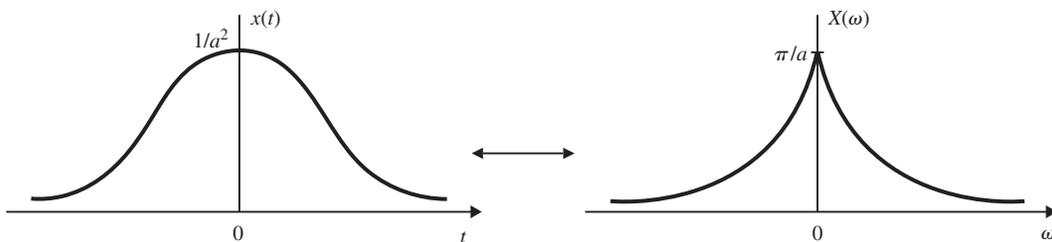


Figura 5-19 $1/(a^2 + t^2)$ y su transformada de Fourier.

5.23. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = 1$

b) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

c) $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

d) $x(t) = \cos \omega_0 t$

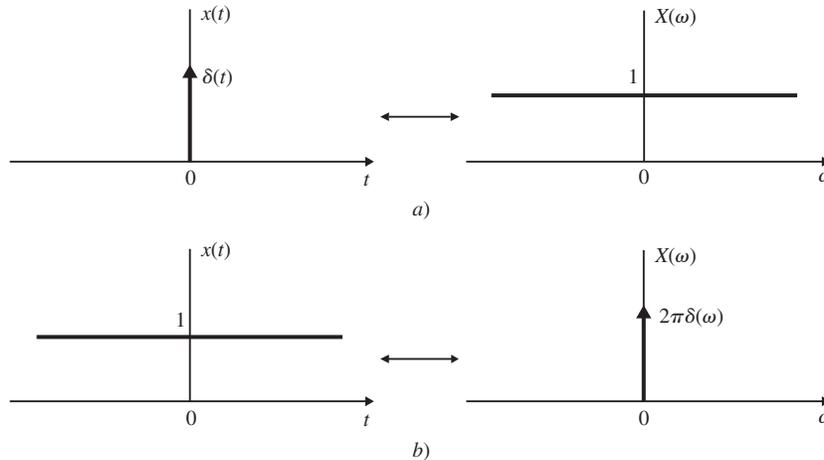
e) $x(t) = \text{sen } \omega_0 t$

a) Por la ecuación (5.43) tenemos que $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (5.140)

Así, por la propiedad de dualidad (5.54) obtenemos

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$
 (5.141)

La figura 5-20a) y b) ilustra las relaciones en las ecuaciones (5.140) y (5.141), respectivamente.

**Figura 5-20** a) Impulso unitario y su transformada de Fourier; b) señal constante (de cd) y su transformada de Fourier.

b) Si aplicamos la propiedad de desplazamiento de frecuencia (5.51) a la ecuación (5.141) obtenemos

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
 (5.142)

c) De la ecuación (5.142) se deriva que

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$
 (5.143)

d) De la fórmula de Euler tenemos que

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

De este modo, por medio de las ecuaciones (5.142) y (5.143) y de la propiedad de linealidad (5.49), obtenemos

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
 (5.144)

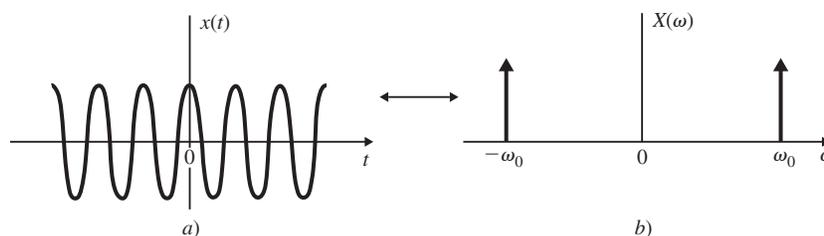
La figura 5-21 ilustra la relación en la ecuación (5.144).

e) De manera similar, tenemos que

$$\text{sen } \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

y nuevamente, mediante las ecuaciones (5.142) y (5.143), obtenemos

$$\text{sen } \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$
 (5.145)

**Figura 5-21** Señal coseno y su transformada de Fourier.

5.24. Encuentre la transformada de Fourier de una señal periódica $x(t)$ con periodo T_0 .

Expresamos $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados, y mediante la ecuación (5.142) y la propiedad de linealidad (5.49), obtenemos

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.146}$$

lo que indica que la transformada de Fourier de una señal periódica se compone de una secuencia de impulsos equidistantes localizados en las frecuencias armónicas de la señal.

5.25. Encuentre la transformada de Fourier del tren de impulsos periódicos [figura 5-22a)].

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

De la ecuación (5.115) en el problema 5.8, la serie de Fourier exponencial compleja de $\delta_{T_0}(t)$ está dada por

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Por medio de la ecuación (5.146) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_{T_0}(t)] &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}$$

o
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.147}$$

De este modo, la transformada de Fourier de un tren de impulsos unitario también es un tren de impulsos similar [figura 5-22b)].

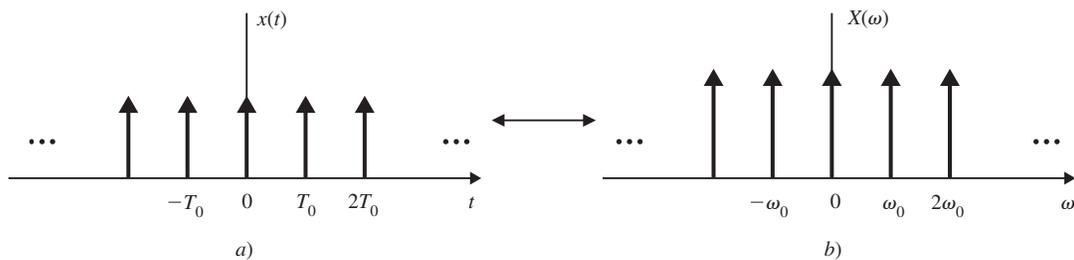


Figura 5-22 Tren de impulsos unitario y su transformada de Fourier.

5.26. Demuestre que
$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \tag{5.148}$$

y
$$x(t) \sen \omega_0 t \leftrightarrow -j \left[\frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \right] \tag{5.149}$$

La ecuación (5.148) se conoce como *teorema de modulación*.

De la fórmula de Euler tenemos que

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Entonces, por la propiedad de desplazamiento de frecuencia (5.51) y la propiedad de linealidad (5.49) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t) e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

De manera semejante, tenemos que

$$\text{sen } \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

y
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) \text{sen } \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x(t) e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}x(t) e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2j}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$x(t) \text{sen } \omega_0 t \leftrightarrow -j\left[\frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\right]$$

5.27. La transformada de Fourier de una señal $x(t)$ está dada por [figura 5-23a)]

$$X(\omega) = \frac{1}{2}p_a(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}p_a(\omega + \omega_0)$$

Encuentre y dibuje $x(t)$.

De la ecuación (5.137) y el teorema de modulación (5.148) se deduce que

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \cos \omega_0 t$$

y esto se esquematiza en la figura 5-23b).

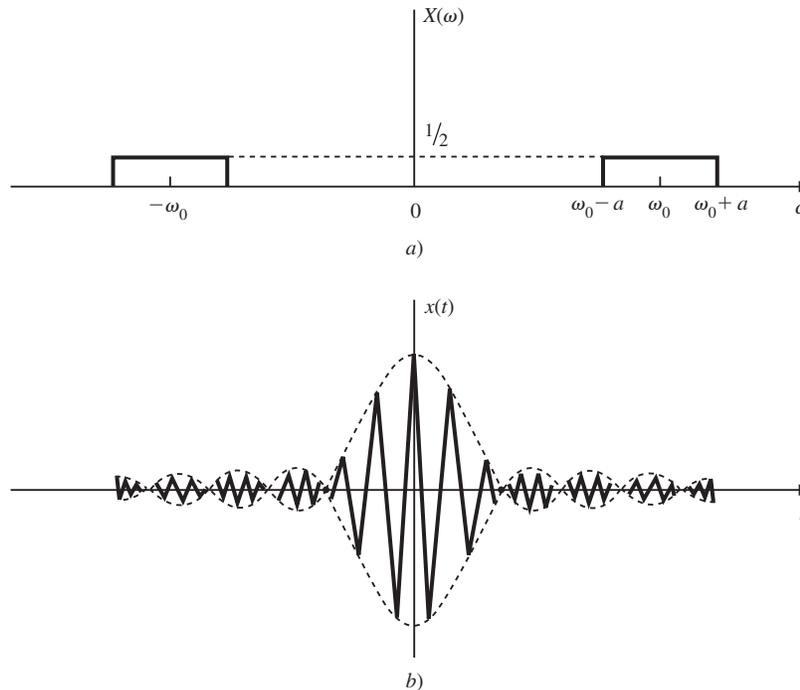


Figura 5-23

5.28. Verifique la propiedad de diferenciación (5.55); es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

De la ecuación (5.32), la transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{5.150}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{5.151}$$

Al comparar la ecuación (5.151) con la ecuación (5.150), concluimos que $dx(t)/dt$ es la transformada de Fourier inversa de $j\omega X(\omega)$. De esta forma,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

5.29. Encuentre la transformada de Fourier de la función *signo*, $\text{sgn}(t)$ (figura 5-24), la cual se define como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{5.152}$$

La función signo, $\text{sgn}(t)$, puede expresarse como

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

Mediante la ecuación (1.30) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

Sea

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Entonces, si aplicamos la propiedad de diferenciación (5.55) tenemos que

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2 \rightarrow X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Por consiguiente,

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{5.153}$$

Observe que $\text{sgn}(t)$ es una función impar, y por tanto su transformada de Fourier es una función imaginaria pura de ω (problema 5.41).

5.30. Verifique la ecuación (5.48); es decir,

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.154}$$

Como se muestra en la figura 5-25, $u(t)$ puede expresarse como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

Observe que $1/2$ es la componente par de $u(t)$, mientras que $1/2 \text{sgn}(t)$ es la componente impar de $u(t)$. De esta forma, por las ecuaciones (5.141) y (5.153) y la propiedad de (5.49) obtenemos

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

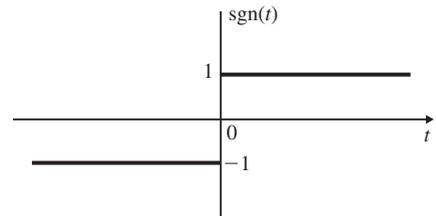


Figura 5-24 Función signo.

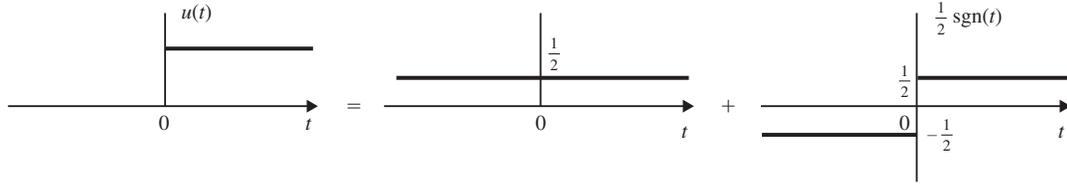


Figura 5-25 Función escalón unitario y sus componentes par e impar.

5.31. Demuestre el teorema de convolución en el tiempo (5.58); es decir,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$$

Por las definiciones (2.6) y (5.31) tenemos

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

Al modificar el orden de integración resulta

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Mediante la propiedad de desplazamiento en el tiempo (5.50)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = X_2(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X_2(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$$

5.32. Mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58), encuentre la transformada de Fourier inversa de $X(\omega) = 1/(a + j\omega)^2$.

De la ecuación (5.45) tenemos que
$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad (5.155)$$

Ahora

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2} = \left(\frac{1}{a + j\omega} \right) \left(\frac{1}{a + j\omega} \right)$$

De este modo, mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58) tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at}u(t) * e^{-at}u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau) e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau) d\tau \\ &= e^{-at} \int_0^t d\tau = te^{-at}u(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a + j\omega)^2} \quad (5.156)$$

5.33. Verifique la propiedad de integración (5.57); es decir,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

De la ecuación (2.60) tenemos que
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

Así, mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58) y la ecuación (5.154) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) * u(t)] &= X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi X(\omega) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)\end{aligned}$$

puesto que $X(\omega)\delta(\omega) = X(0)\delta(\omega)$ por la ecuación (1.25). De este modo,

$$\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

5.34. Por medio de la propiedad de integración (5.57) y la ecuación (1.31), encuentre la transformada de Fourier de $u(t)$.

De la ecuación (1.31) tenemos que $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

Ahora, de la ecuación (5.140) tenemos que $\delta(t) \leftrightarrow 1$

Cuando establecemos $x(\tau) = \delta(\tau)$ en la ecuación (5.57) llegamos a

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(\omega) = 1 \quad \text{y} \quad X(0) = 1$$

y $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

5.35. Demuestre el teorema de convolución en la frecuencia (5.59); es decir,

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Por las definiciones (5.31) y (5.32) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)\end{aligned}$$

Por consiguiente, $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

5.36. Por medio del teorema de convolución en la frecuencia (5.59) derive el teorema de modulación (5.148).

De la ecuación (5.144) tenemos que

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Por el teorema de convolución de la frecuencia (5.59) llegamos a

$$\begin{aligned}x(t) \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la ecuación (2.59).

5.37. Verifique la relación de Parseval (5.63); esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

Del teorema de convolución en la frecuencia (5.59) tenemos que

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

es decir,
$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)x_2(t)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

Al establecer $\omega = 0$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(-\lambda) d\lambda$$

Al cambiar la variable muda de integración obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

5.38. Demuestre la identidad de Parseval [ecuación (5.64)] o el teorema de Parseval para la transformada de Fourier; esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Por la definición (5.31) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right]^* = X^*(-\omega) \end{aligned}$$

donde * denota el complejo conjugado. De este modo,

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega) \tag{5.157}$$

Al establecer $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x^*(t)$ en la relación de Parseval (5.63) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega) d\omega$$

o
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

5.39. Demuestre que la ecuación (5.61a); es decir,

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

es una condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real.

Por la definición (5.31),
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Si $x(t)$ es real, entonces $x^*(t) = x(t)$ y

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = X(-\omega) \end{aligned}$$

Así, $X^*(\omega) = X(-\omega)$ es la condición necesaria para que $x(t)$ sea real. A continuación supongamos que $X^*(\omega) = X(-\omega)$. De la definición de la transformada de Fourier inversa (5.32)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Entonces
$$\begin{aligned} x^*(t) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda = x(t) \end{aligned}$$

lo que indica que $x(t)$ es real. De esta manera concluimos que

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

es la condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real.

5.40. Encuentre las transformadas de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(-t)$

b) $x(t) = e^{at}u(-t), a > 0$

De la ecuación (5.53) tenemos que $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$

De este modo, si $x(t)$ es real, entonces por la ecuación (5.61a) tenemos que

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.158}$$

a) De la ecuación (5.154) $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

Así, por la ecuación (5.158) obtenemos

$$u(-t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{5.159}$$

b) De la ecuación (5.155) $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$

De esta forma, por la ecuación (5.158) obtenemos que

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - j\omega} \tag{5.160}$$

5.41. Considere una señal real $x(t)$ y sea

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega)$$

y $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son las respectivas componentes par e impar de $x(t)$. Demuestre que

$$x_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \tag{5.161a}$$

$$x_o(t) \leftrightarrow jB(\omega) \tag{5.161b}$$

De las ecuaciones (1.5) y (1.6) tenemos que

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Ahora, si $x(t)$ es real, entonces por la ecuación (5.158) tenemos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

De este modo concluimos que $x_e(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}X^*(\omega) = A(\omega)$

$$x_o(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = jB(\omega)$$

Las ecuaciones (5.161a) y (5.161b) demuestran respectivamente que la transformada de Fourier de una señal real par es una función real de ω , mientras que una señal real impar es una función imaginaria de ω .

5.42. Mediante las ecuaciones (5.161a) y (5.155) encuentre la transformada de Fourier de $e^{-a|t|}$ ($a > 0$).

De la ecuación (5.155) tenemos que

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Por la ecuación (1.5) la componente par de $e^{-at}u(t)$ está dada por

$$\frac{1}{2}e^{-at}u(t) + \frac{1}{2}e^{at}u(-t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

Así, por la ecuación (5.161a) tenemos que

$$\frac{1}{2}e^{-a|t|} \leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a + j\omega} \right) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

o

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

y éste es el mismo resultado obtenido en el problema 5.21 [ecuación (5.138)].

5.43. Encuentre la transformada de Fourier de una señal de pulso gaussiano

$$x(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$$

Por la definición (5.31)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \quad (5.162)$$

Si tomamos la derivada de ambos lados de la ecuación (5.162) con respecto a ω tenemos

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -j \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt$$

Ahora, por medio de la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} u dv = uv \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v du$$

y al dejar que

$$u = e^{-j\omega t} \quad y \quad dv = te^{-at^2} dt$$

tenemos que

$$du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \quad y \quad v = -\frac{1}{2a} e^{-at^2}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt &= -\frac{1}{2a} e^{-at^2} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - j \frac{\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= -j \frac{\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

puesto que $a > 0$. De este modo obtenemos

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} X(\omega)$$

Al resolver la anterior ecuación diferencial separable para $X(\omega)$ obtenemos

$$X(\omega) = A e^{-\omega^2/4a} \quad (5.163)$$

donde A es una constante arbitraria. Para evaluar A procederemos como sigue: estableciendo $\omega = 0$ en la ecuación (5.162) y mediante un cambio de variable tenemos que

$$X(0) = A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Si sustituimos este valor de A en la ecuación (5.163) obtenemos

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (5.164)$$

Por consiguiente, llegamos a
$$e^{-at^2}, a > 0 \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \tag{5.165}$$

Observe que la transformada de Fourier de una señal de pulso gaussiano también es un pulso gaussiano en el dominio de la frecuencia. La figura 5-26 ilustra la relación en la ecuación (5.165).

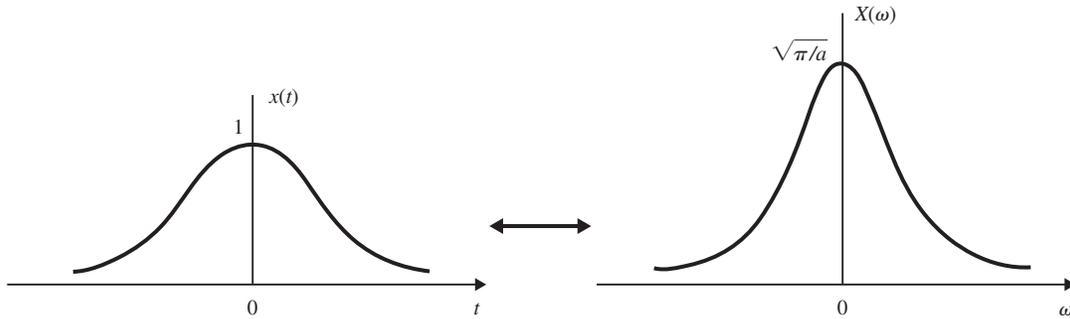


Figura 5-26 Pulso gaussiano y su transformada de Fourier.

RESPUESTA EN FRECUENCIA

5.44. Mediante la transformada de Fourier vuelva a resolver el problema 2.25.

El sistema está descrito por
$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

Al tomar las transformadas de Fourier de la ecuación anterior obtenemos que

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega)$$

o
$$(j\omega + 2) Y(\omega) = (1 + j\omega) X(\omega)$$

Por consiguiente, por la ecuación (5.67) la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega} = \frac{2 + j\omega - 1}{2 + j\omega} = 1 - \frac{1}{2 + j\omega}$$

Tomando la transformada de Fourier inversa de $H(\omega)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

Observe que el procedimiento es idéntico al del método de la transformada de Laplace con s reemplazada por $j\omega$ (problema 3.29).

5.45. Considere un sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{5.166}$$

Mediante la transformada de Fourier, encuentre la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes señales de entrada:

a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

b) $x(t) = u(t)$

a) Tomando las transformadas de Fourier de la ecuación (5.166) tenemos que

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega)$$

Por consiguiente,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

De la ecuación (5.155)

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

y

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$$

Por tanto,

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

b) De la ecuación (5.154)

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

De este modo, por la ecuación (5.66) y mediante la técnica de expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \frac{1}{2 + j\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) \frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{j\omega(2 + j\omega)} \\ &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{2 + j\omega} \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{2 + j\omega} \end{aligned}$$

donde utilizamos el hecho de que $f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$ [ecuación (1.25)]. De este modo,

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

Observamos que el método de la transformada de Laplace es más fácil en este caso debido a la transformada de Fourier de $u(t)$.

5.46. Considere el sistema LIT en el problema 5.45. Si la entrada $x(t)$ es la forma de onda cuadrada periódica mostrada en la figura 5-27, encuentre la amplitud del primer y del tercer armónicos en la salida $y(t)$.

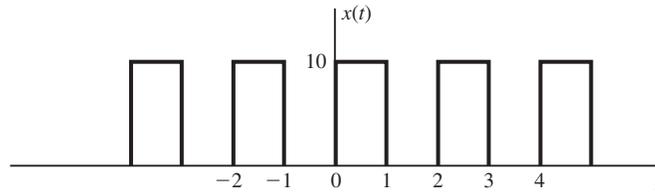


Figura 5-27

Observe que $x(t)$ es la misma $x(t)$ mostrada en la figura 5-8 [problema 5.5]. De este modo, estableciendo que $A = 10$, $T_0 = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$ en la ecuación (5.106) tenemos que

$$x(t) = 5 + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\pi t}$$

A continuación, del problema 5.45

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \rightarrow H(k\omega_0) = H(k\pi) = \frac{1}{2 + jk\pi}$$

Así, por la ecuación (5.74) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= 5H(0) + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} H[(2m+1)\pi] e^{j(2m+1)\pi t} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)[2 + j(2m+1)\pi]} e^{j(2m+1)\pi t} \end{aligned} \quad (5.167)$$

Sea

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

La forma armónica de $y(t)$ está dada por [ecuación (5.15)]

$$y(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k)$$

donde D_k es la amplitud de la k -ésima componente armónica de $y(t)$. Por las ecuaciones (5.11) y (5.16), D_k y d_k están relacionadas mediante

$$D_k = 2 |d_k| \tag{5.168}$$

De esta manera, de la ecuación (5.167), con $m = 0$, obtenemos

$$D_1 = 2 |d_1| = 2 \left| \frac{10}{j\pi(2 + j\pi)} \right| = 1.71$$

Con $m = 1$ obtenemos

$$D_3 = 2 |d_3| = 2 \left| \frac{10}{j\pi(3)(2 + j3\pi)} \right| = 0.22$$

5.47. La representación gráfica más usada de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es la *gráfica de Bode* en la cual las cantidades $20 \log_{10} |H(\omega)|$ y $\theta_H(\omega)$ se grafican contra ω , con ω graficada en una escala logarítmica. A la cantidad $20 \log_{10} |H(\omega)|$ se le llama magnitud expresada en *decibelios* (dB), denotada como $|H(\omega)|_{\text{dB}}$. Dibuje las gráficas de Bode para las siguientes respuestas de frecuencia:

a) $H(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{10}$

b) $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/100}$

c) $H(\omega) = \frac{10^4(1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}$

a) $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$

Para $\omega \ll 10$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| \rightarrow 20 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow 0$$

Para $\omega \gg 10$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| \rightarrow 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{10} \right) \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

En una escala de frecuencias logarítmicas, $20 \log_{10}(\omega/10)$ es una línea recta con una pendiente de 20 dB/década (una década es un cambio de 10 a 1 en la frecuencia). Esta línea recta intercepta el eje de 0 dB en $\omega = 10$ [figura 5-28a]. (Este valor de ω se conoce como *frecuencia de esquina*.) En la frecuencia de esquina de $\omega = 10$

$$H(10)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |1 + j1| = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

La gráfica de $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ se esquematiza en la figura 5-28a). A continuación,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10}$$

Entonces $\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \rightarrow 0$ a medida que $\omega \rightarrow 0$

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

Para $\omega = 10$, $\theta_H(10) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$ radianes (rad). La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se dibuja en la figura 5-28b). Observe que las líneas punteadas representan la aproximación en línea recta de las gráficas de Bode.

b) $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega/100} \right| = -20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right|$

Para $\omega \ll 100$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right| \rightarrow -20 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow 0$$

Para $\omega \gg 100$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left| 1 - j \frac{\omega}{100} \right| \rightarrow -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{100} \right) \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

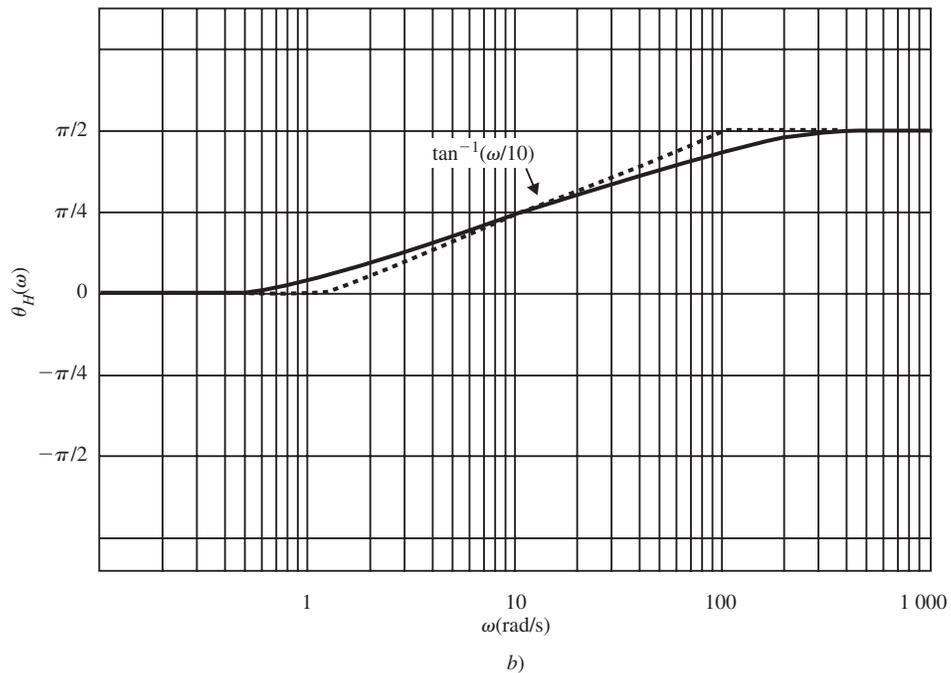
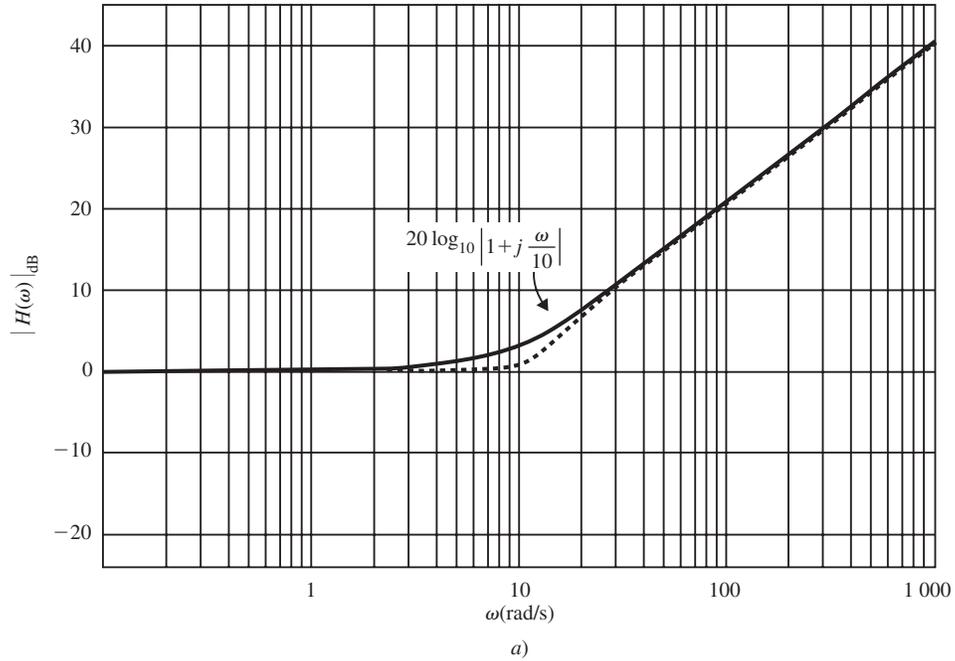


Figura 5-28 Gráficas de Bode.

En una escala de frecuencia logarítmica $-20 \log_{10}(\omega/100)$ es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década. Esta línea recta intercepta al eje 0-dB en la frecuencia de esquina $\omega = 100$ [figura 5-29a)]. Para la frecuencia de esquina $\omega = 100$

$$H(100)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

La gráfica de $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ se esquematiza en la figura 5-29a). A continuación,

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100}$$

Entonces $\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100} \rightarrow 0$ a medida que $\omega \rightarrow 0$

$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ a medida que $\omega \rightarrow \infty$

Para $\omega = 100$, $\theta_H(100) = -\tan^{-1} 1 = -\pi/4$ rad. La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se esquematiza en la figura 5-29b).

c) Primero, volvemos a escribir $H(\omega)$ en la forma estándar como

$$H(\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/100)}$$

Entonces $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right|$

Observe que existen tres frecuencias de esquina: $\omega = 1$, $\omega = 10$ y $\omega = 100$. En la frecuencia de esquina $\omega = 1$

$$H(1)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{2} - 20 \log_{10} \sqrt{1.01} - 20 \log_{10} \sqrt{1.0001} \approx 23 \text{ dB}$$

Para la frecuencia de esquina $\omega = 10$

$$H(10)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{101} - 20 \log_{10} \sqrt{2} - 20 \log_{10} \sqrt{1.01} \approx 37 \text{ dB}$$

Para la frecuencia de esquina $\omega = 100$

$$H(100)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{10,001} - 20 \log_{10} \sqrt{101} - 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 37 \text{ dB}$$

La gráfica de amplitud de Bode se dibuja en la figura 5-30a). También se indica cada término que contribuye a la amplitud total. A continuación,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - \tan^{-1} \frac{\omega}{100}$$

Entonces $\theta_H(\omega) \rightarrow 0 - 0 - 0 = 0$ a medida que $\omega \rightarrow 0$

$\theta_H(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ a medida que $\omega \rightarrow \infty$

y $\theta_H(1) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}(0.01) = 0.676$ rad

$\theta_H(10) = \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) = 0.586$ rad

$\theta_H(100) = \tan^{-1}(100) - \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) = -0.696$ rad

La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se ilustra en la figura 5-30b).

5.48. Un desplazador de fase ideal de $(-\pi/2)$ radianes (o -90°) (figura 5-31) se define mediante la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & \omega > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.169)$$

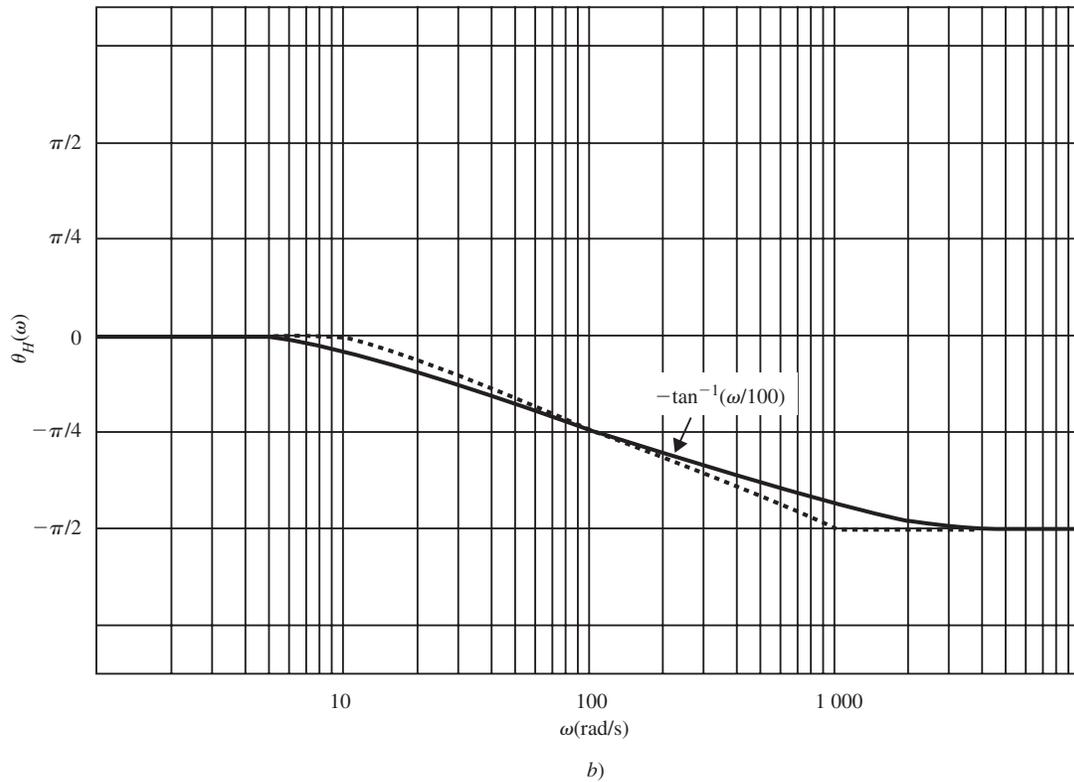
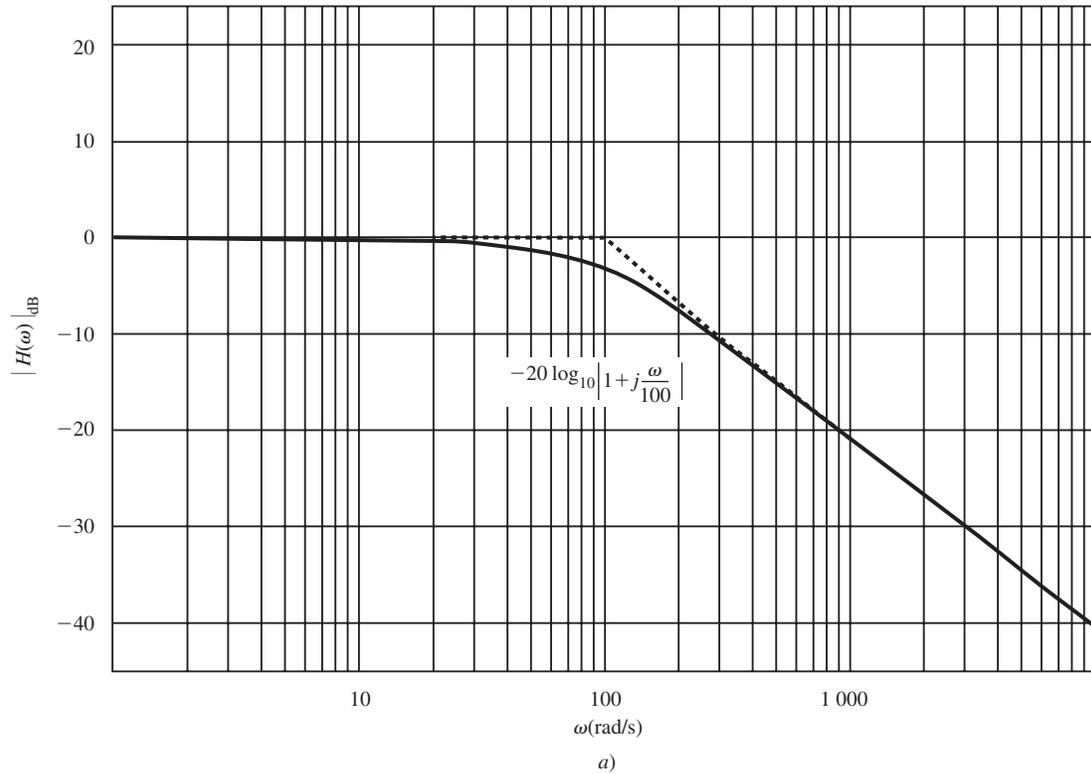


Figura 5-29 Gráficas de Bode.

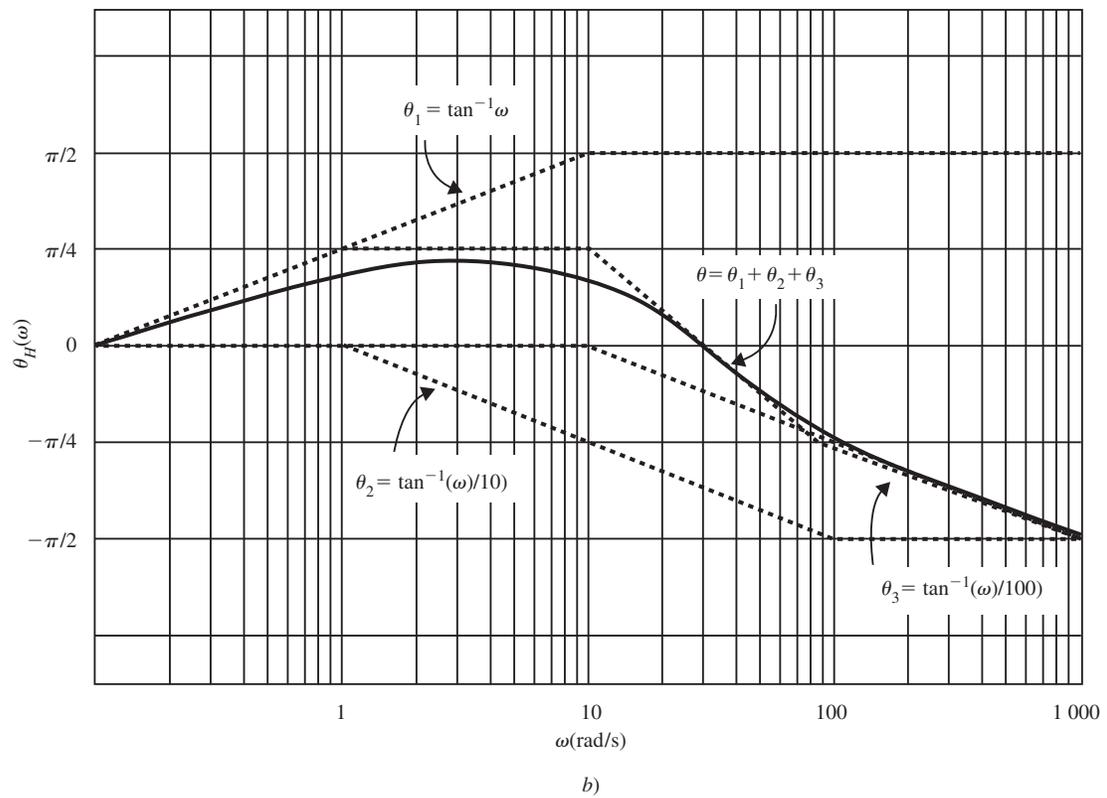
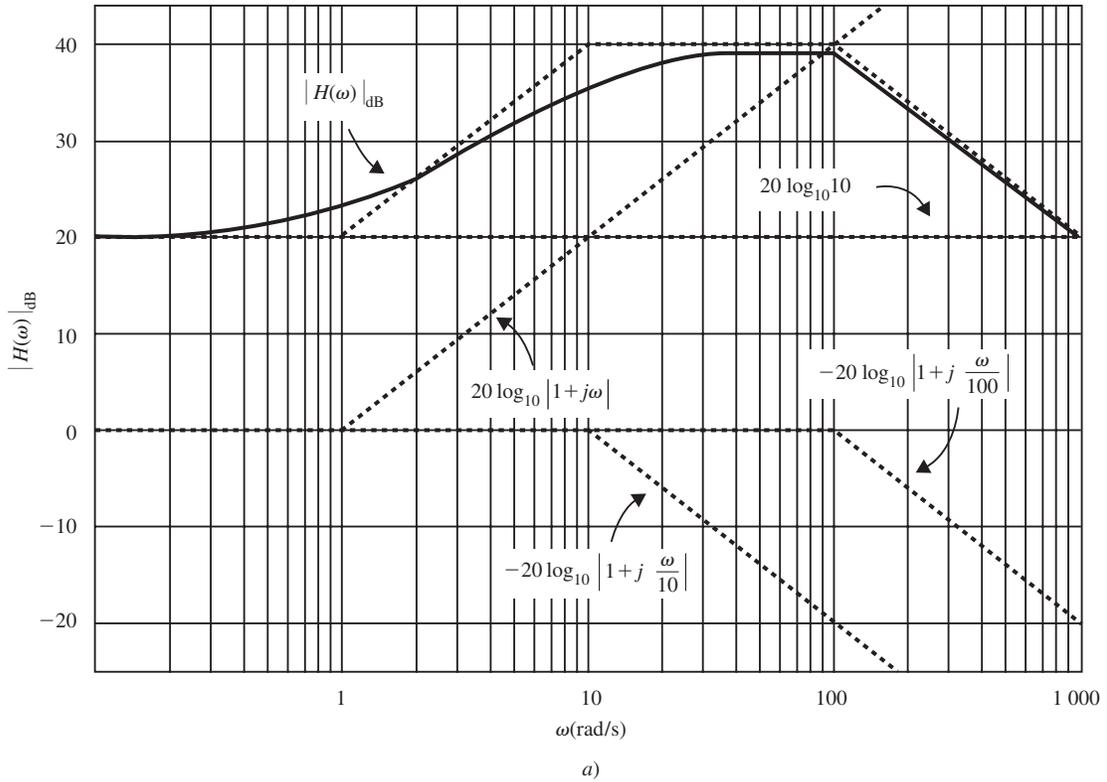


Figura 5-30 Gráficas de Bode.

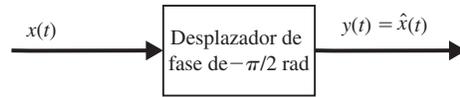


Figura 5-31 Desplazador de fase de $-\pi/2$ rad.

- a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de este desplazador de fase.
 b) Encuentre la salida $y(t)$ de este desplazador de fase debida a una entrada arbitraria $x(t)$.
 c) Encuentre la salida $y(t)$ cuando $x(t) = \cos \omega_0 t$.

a) Puesto que $e^{-j\pi/2} = -j$ y $e^{j\pi/2} = j$, $H(\omega)$ puede volver a escribirse como

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5.170)$$

donde

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.171)$$

Ahora, de la ecuación (5.153)

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

y por la propiedad de dualidad (5.54) tenemos

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

o

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5.172)$$

puesto que $\operatorname{sgn}(\omega)$ es una función impar de ω . De esta forma, la respuesta al impulso $h(t)$ está dada por

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[-j \operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{\pi t} \quad (5.173)$$

b) Por la ecuación (2.6)

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.174)$$

La señal $y(t)$ definida por la ecuación (5.174) se conoce como *transformada de Hilbert* de $x(t)$ y por lo general se denota mediante $\hat{x}(t)$.

c) De la ecuación (5.144)

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)][-j \operatorname{sgn}(\omega)] \\ &= -j\pi \operatorname{sgn}(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) - j\pi \operatorname{sgn}(-\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

puesto que $\operatorname{sgn}(\omega_0) = 1$ y $\operatorname{sgn}(-\omega_0) = -1$. De este modo, de la ecuación (5.145) obtenemos

$$y(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Observe que $\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \operatorname{sen} \omega_0 t$.

5.49. Considere un sistema LIT causal de tiempo continuo con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Demuestre que la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema puede obtenerse en términos de $A(\omega)$ o $B(\omega)$ solos.

Puesto que el sistema es causal, por definición

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

En consecuencia,

$$h(-t) = 0 \quad t > 0$$

Sea

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

donde $h_e(t)$ y $h_o(t)$ son las respectivas componentes par e impar de $h(t)$. Entonces de las ecuaciones (1.5) y (1.6) podemos escribir

$$h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t) \quad (5.175)$$

De las ecuaciones (5.61b) y (5.61c) tenemos que

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad \text{y} \quad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega)$$

De este modo, por la ecuación (5.175)

$$h(t) = 2h_e(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[A(\omega)] \quad t > 0 \quad (5.176a)$$

$$h(t) = 2h_o(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[jB(\omega)] \quad t > 0 \quad (5.176b)$$

Las ecuaciones (5.176a) y (5.176b) indican que $h(t)$ puede obtenerse en términos de $A(\omega)$ o $B(\omega)$ solos.

5.50. Considere un sistema LIT causal de tiempo continuo con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Si la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema no contiene impulsos en el origen, entonces demuestre que $A(\omega)$ y $B(\omega)$ satisfacen la siguiente ecuación:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad (5.177a)$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad (5.177b)$$

Como en el problema 5.49, sea

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

Puesto que $h(t)$ es causal, es decir, $h(t) = 0$ para $t < 0$, tenemos que

$$h_e(t) = -h_o(t) \quad t < 0$$

También de la ecuación (5.175) tenemos que

$$h_e(t) = h_o(t) \quad t > 0$$

De este modo, mediante la ecuación (5.152) podemos escribir

$$h_e(t) = h_o(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (5.178a)$$

$$h_o(t) = h_e(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (5.178b)$$

Ahora, de las ecuaciones (5.61b), (5.61c) y (5.153) tenemos que

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega) \quad \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

De esta forma, por el teorema de convolución en la frecuencia (5.59) obtenemos

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} jB(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} B(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

y

$$jB(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \frac{2}{j\omega} = -j \frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

o

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

Observe que $A(\omega)$ es la transformada de Hilbert de $B(\omega)$ [ecuación (5.174)] y que $B(\omega)$ es el negativo de la transformada de Hilbert de $A(\omega)$.

5.51. Se sabe que la parte real de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de un sistema LIT causal es $\pi\delta(\omega)$. Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ y la función del impulso $h(t)$ del sistema.

Sea

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Mediante la ecuación (5.177b), con $A(\omega) = \pi\delta(\omega)$ obtenemos

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) \frac{1}{\omega - \lambda} d\lambda = -\frac{1}{\omega}$$

Por consiguiente,
$$H(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

y con la ecuación (5.154)
$$h(t) = u(t)$$

FILTRADO

5.52. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada para este filtro es
$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

- Encuentre la salida $y(t)$ para $a < \omega_c$.
 - Encuentre la salida $y(t)$ para $a > \omega_c$.
 - ¿En cuál de los casos la salida sufre distorsión?
- a) De la ecuación (5.137) (problema 5.20) tenemos que

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Entonces, cuando $a < \omega_c$ tenemos que

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

De este modo,

$$y(t) = x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

- b) Cuando $a > \omega_c$ tenemos que
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

Así,

$$y(t) = h(t) = \frac{\text{sen } \omega_c t}{\pi t}$$

- c) En el inciso a), es decir, cuando $\omega_c > a$, $y(t) = x(t)$ y el filtro no produce ninguna distorsión. En el inciso b), esto es, cuando $\omega_c < a$, $y(t) = h(t)$ y el filtro produce distorsión.

5.53. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

La entrada para este filtro es la onda cuadrada periódica mostrada en la figura 5-27. Encuentre la salida $y(t)$.

Estableciendo $A = 10$, $T_0 = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$ en la ecuación (5.107) (problema 5.5), obtenemos

$$x(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \left(\text{sen } \pi t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\pi t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\pi t + \dots \right)$$

Puesto que la frecuencia de corte ω_c del filtro es de 4π rad, el filtro pasa todas las componentes armónicas de $x(t)$ cuyas frecuencias angulares sean menores de 4π rad y rechaza todos los componentes armónicos de $x(t)$ cuyas frecuencias angulares sean mayores de 4π rad. Por consiguiente,

$$y(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \text{sen } \pi t + \frac{20}{3\pi} \text{sen } 3\pi t$$

5.54. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada para este filtro es

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

Encuentre el valor de ω_c de tal modo que este filtro pase exactamente una mitad de la energía normalizada de la señal de entrada $x(t)$.

De la ecuación (5.155)

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

Entonces

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2 + j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La energía normalizada de $x(t)$ es

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}$$

Mediante la identidad de Parseval (5.64), la energía normalizada de $y(t)$ es

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{4 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{d\omega}{4 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\omega_c}{2} = \frac{1}{2} E_x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos

$$\frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \omega_c = 2 \text{ rad/s}$$

5.55. El ancho de banda equivalente de un filtro con respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se define por

$$W_{\text{eq}} = \frac{1}{|H(\omega)|_{\text{máx}}^2} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \tag{5.179}$$

donde $|H(\omega)|_{\text{máx}}$ denota el valor máximo del espectro de magnitud. Considere el filtro pasa-bajas RC ilustrado en la figura 5-6a).

- a) Encuentre su ancho de banda de 3 dB $W_{3\text{dB}}$.
- b) Encuentre su ancho de banda equivalente W_{eq} .

a) De la ecuación (5.91), la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC está dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

donde $\omega_0 = 1/RC$. Ahora

$$|H(\omega)| = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}}$$

El espectro de amplitud $|H(\omega)|$ se grafica en la figura 5-6b). Cuando $\omega = \omega_0 = 1/RC$, $|H(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$. De este modo, el ancho de banda de 3 dB del filtro RC está dado por

$$W_{3\text{dB}} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

- b) De la figura 5-6b) vemos que $|H(0)| = 1$ es el espectro de magnitud máximo. Al reescribir $H(\omega)$ como

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{1/RC + j\omega}$$

y por medio de la ecuación (5.179), el ancho de banda equivalente del filtro RC está dado por (figura 5-32)

$$W_{\text{eq}} = \frac{1}{(RC)^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1/RC)^2 + \omega^2} = \frac{1}{(RC)^2} \frac{\pi}{2/RC} = \frac{\pi}{2RC}$$

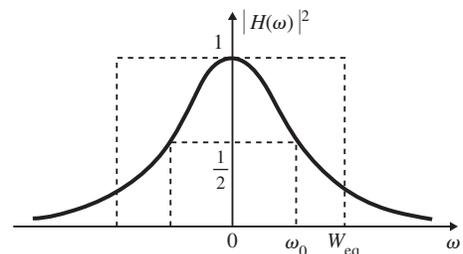


Figura 5-32 Ancho de banda del filtro.

5.56. El tiempo de subida t_r del filtro RC pasa-bajas en la figura 5-6a) se define como el tiempo requerido para que una respuesta al escalón unitario vaya de 10 a 90% de su valor final. Demuestre que

$$t_r = \frac{0.35}{f_{3\text{ dB}}}$$

donde $f_{3\text{ dB}} = W_{3\text{ dB}}/2\pi = 1/2\pi RC$ es el ancho de banda de 3 dB (en hertz [o hertzios]) del filtro.

De la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC , la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Entonces, de la ecuación (2.12) se concluye que la respuesta al escalón unitario $s(t)$ es

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} d\tau = (1 - e^{-t/RC}) u(t)$$

lo cual se grafica en la figura 5-33. Por la definición del tiempo de subida

$$t_r = t_2 - t_1$$

donde $s(t_1) = 1 - e^{-t_1/RC} = 0.1 \rightarrow e^{-t_1/RC} = 0.9$

$s(t_2) = 1 - e^{-t_2/RC} = 0.9 \rightarrow e^{-t_2/RC} = 0.1$

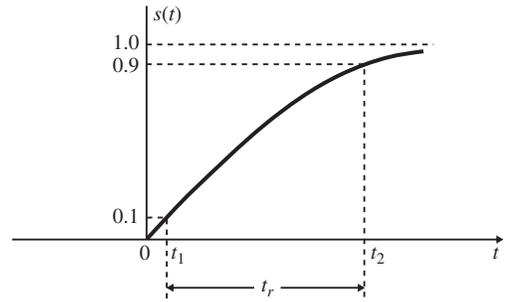


Figura 5-33

Al dividir la primera ecuación entre la segunda del lado derecho obtenemos

$$e^{(t_2 - t_1)/RC} = 9$$

y
$$t_r = t_2 - t_1 = RC \ln(9) = 2.197 RC = \frac{2.197}{2\pi f_{3\text{ dB}}} = \frac{0.35}{f_{3\text{ dB}}}$$

lo que indica la relación inversa entre el ancho de banda y el tiempo de subida.

5.57. Otra definición de ancho de banda para una señal $x(t)$ es el *ancho de banda W_{90} de contenido de energía al 90%*, definido por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W_{90}}^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = 0.9 E_x \quad (5.180)$$

donde E_x es el contenido de energía normalizada de la señal $x(t)$. Encuentre el W_{90} para las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$

b) $x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$

a) De la ecuación (5.155)
$$x(t) = e^{-at} u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

De la ecuación (1.14)
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

Ahora, por la ecuación (5.180)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{W_{90}}{a} \right) = 0.9 \frac{1}{2a}$$

de lo cual obtenemos
$$\tan^{-1} \left(\frac{W_{90}}{a} \right) = 0.45\pi$$

Así,
$$W_{90} = a \tan(0.45\pi) = 6.31a \quad \text{rad/s}$$

b) De la ecuación (5.137)

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Mediante la identidad de Parseval (5.64) tenemos que

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^a d\omega = \frac{a}{\pi}$$

Entonces, por la ecuación (5.180)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} d\omega = \frac{W_{90}}{\pi} = 0.9 \frac{a}{\pi}$$

y así obtenemos

$$W_{90} = 0.9a \quad \text{rad/s}$$

Observe que el ancho de banda absoluto de $x(t)$ es a (en radianes/segundo).

5.58. Sea $x(t)$ una señal limitada en banda de valores reales especificada por [figura 5-34b)]

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_M$$

Sea $x_s(t)$ definida por

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \tag{5.181}$$

a) Grafique $x_s(t)$ para $T_s < \pi/\omega_M$ y para $T_s > \pi/\omega_M$.

b) Encuentre y grafique el espectro de Fourier $X_s(\omega)$ de $x_s(t)$ para $T_s < \pi/\omega_M$ y para $T_s > \pi/\omega_M$.

a) Mediante la ecuación (1.26) tenemos que

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \end{aligned} \tag{5.182}$$

La señal muestreada $x_s(t)$ se grafica en la figura 5-34c) para $T_s < \pi/\omega_M$, y en la figura 5-34i) para $T_s > \pi/\omega_M$.

La señal $x(t)$ se conoce como *señal muestreada ideal*, T_s se conoce como *intervalo* (o *periodo*) de muestreo, mientras $f_s = 1/T_s$ se conoce como *tasa* (o *frecuencia*) de muestreo.

b) De la ecuación (5.147) (problema 5.25) tenemos que

$$\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Sea

$$x_s(t) \leftrightarrow X_s(\omega)$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia (5.59) tenemos que

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \mathcal{F}[x(t)\delta_{T_s}(t)] = \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

Por medio de la ecuación (1.26) obtenemos

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.183}$$

lo que demuestra que $X_s(\omega)$ se compone de réplicas periódicamente repetidas de $X(\omega)$ centradas alrededor de $k\omega_s$ para toda k . El espectro de Fourier $X_s(\omega)$ se ilustra en la figura 5-34f) para $T_s < \pi/\omega_M$ (o $\omega_s > 2\omega_M$), y en la figura 5-34j) para $T_s > \pi/\omega_M$ (o $\omega_s < 2\omega_M$), donde $\omega_s = 2\pi/T_s$. Puede apreciarse que no ocurre traslape de las réplicas $X(\omega - k\omega_s)$

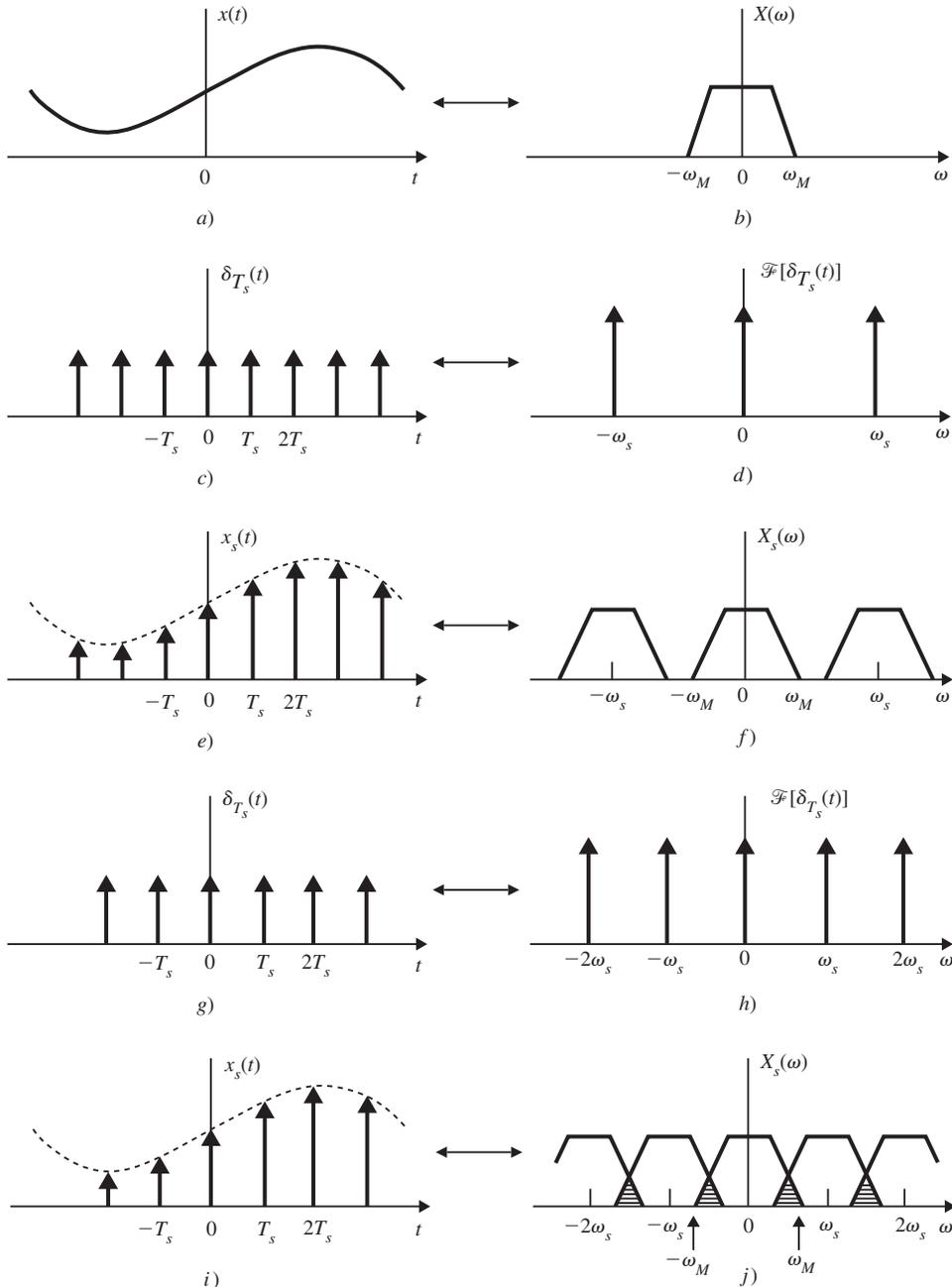


Figura 5-34 Muestreo ideal.

en $X_s(\omega)$ para $\omega_s \geq 2 \omega_M$ y que se produce traslape de las réplicas espectrales para $\omega_s < 2 \omega_M$. Este efecto se conoce como *aliasing* (o *submuestreo*).

5.59. Sea $x(t)$ una señal limitada en banda de valores reales especificada por

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_M$$

Demuestre que $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \omega_M(t - kT_s)}{\omega_M(t - kT_s)} \tag{5.184}$$

donde $T_s = \pi/\omega_M$.

Sea
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow X_s(\omega)$$

De la ecuación (5.183) tenemos que
$$T_s X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.185}$$

Entonces, bajo las siguientes dos condiciones,

$$(1) X(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M \quad \text{y} \quad (2) T_s = \frac{\pi}{\omega_M}$$

de la ecuación (5.185) vemos que
$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} X_s(\omega) \quad |\omega| < \omega_M \tag{5.186}$$

A continuación, tomando la transformada de Fourier de la ecuación (5.182) tenemos que

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{-jkT_s\omega} \tag{5.187}$$

Sustituyendo la ecuación (5.187) en la ecuación (5.186) obtenemos

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{-jkT_s\omega} \quad |\omega| < \omega_M \tag{5.188}$$

Tomando la transformada de Fourier inversa de la ecuación (5.188) obtenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{j\omega(t-kT_s)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j\omega(t-kT_s)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \omega_M(t-kT_s)}{\omega_M(t-kT_s)} \end{aligned}$$

De los problemas 5.58 y 5.59 concluimos que una señal limitada en banda que no tiene componentes de frecuencia mayores de f_M hertz puede recuperarse por completo a partir de un conjunto de muestras tomadas a la tasa de $f_s (\geq 2f_M)$ muestras por segundo. Esto se conoce como *teorema del muestreo uniforme* para señales pasa-bajas. Hacemos referencia a $T_s = \pi/\omega_M = 1/2f_M$ ($\omega_M = 2\pi f_M$) como *intervalo de muestreo de Nyquist* y a $f_s = 1/T_s = 2f_M$ como *tasa de muestreo de Nyquist*.

5.60. Considere el sistema mostrado en la figura 5-35a). La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro ideal pasa-bajas está dada por [figura 5-35b)]

$$H(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Demuestre que si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces para cualquier selección de T_s ,

$$y(mT_s) = x(mT_s) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

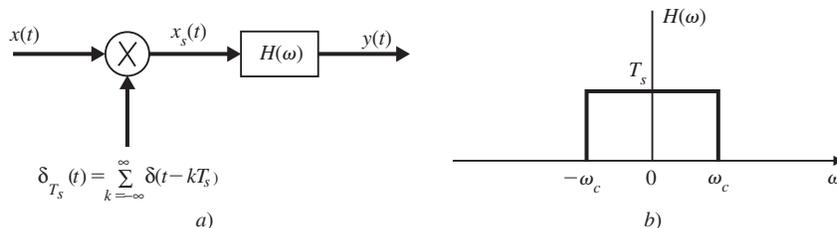


Figura 5-35

De la ecuación (5.137), la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro ideal pasa-bajas está dada por

$$h(t) = T_s \frac{\text{sen } \omega_c t}{\pi t} = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_c t}{\omega_c t} \quad (5.189)$$

De la ecuación (5.182) tenemos que

$$x_s(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Por la ecuación (2.6) y mediante las ecuaciones (2.7) y (1.26), la salida $y(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \right] * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) [h(t) * \delta(t - kT_s)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) h(t - kT_s) \end{aligned}$$

Mediante la ecuación (5.189) obtenemos

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)}$$

Si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $T_s \omega_c / \pi = 1$, y tenemos

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen} [\omega_s (t - kT_s) / 2]}{\omega_s (t - kT_s) / 2}$$

Estableciendo $t = mT_s$ ($m = \text{entero}$) y por el hecho que $\omega_s T_s = 2\pi$, obtenemos

$$y(mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \pi(m - k)}{\pi(m - k)}$$

Como
$$\frac{\text{sen } \pi(m - k)}{\pi(m - k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

tenemos que
$$y(mT_s) = x(mT_s) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

lo cual demuestra que sin ninguna restricción sobre $x(t)$, $y(mT_s) = x(mT_s)$ para cualquier valor entero de m .

Observe del teorema del muestreo (problemas 5.58 y 5.59) que si $\omega_s = 2\pi/T_s$ es dos veces mayor a la frecuencia más alta presente en $x(t)$ y $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $y(t) = x(t)$. Si esta condición sobre el ancho de banda de $x(t)$ no se satisface, entonces $y(t) \neq x(t)$. Sin embargo, si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $y(mT_s) = x(mT_s)$ para cualquier valor entero de m .

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

- 5.61.** Considere una señal rectificadora de onda seno $x(t)$ definida como

$$x(t) = |A \text{sen } \pi t|$$

- Grafique $x(t)$ y encuentre su periodo fundamental.
- Encuentre la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

- 5.62.** Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de una señal periódica $x(t)$ definida por

$$x(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi \quad \text{y} \quad x(t + 2\pi) = x(t)$$

- 5.63.** Por medio del resultado del problema 5.10, encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la señal $x(t)$ mostrada en la figura 5-36.

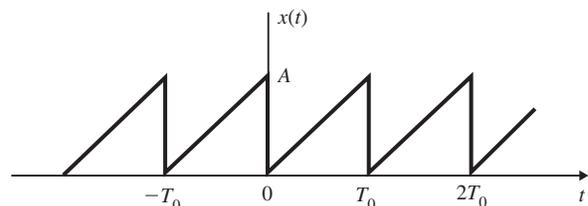


Figura 5-36

5.64. Derive la representación en serie de Fourier en forma armónica (5.15) a partir de la representación de la serie de Fourier trigonométrica (5.8).

5.65. Demuestre que el valor cuadrático medio de una señal periódica real $x(t)$ es la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos.

5.66. Demuestre que si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

5.67. Mediante la técnica de diferenciación, encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso triangular ilustrada en la figura 5-37.

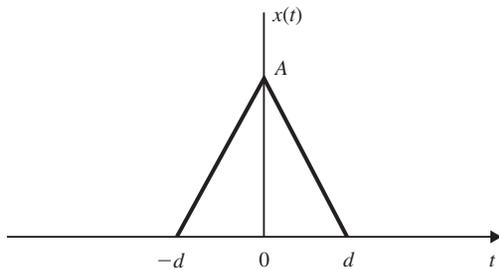


Figura 5-37

5.68. Encuentre la transformada de Fourier inversa de

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^N}$$

5.69. Encuentre la transformada de Fourier inversa de

$$X(\omega) = \frac{1}{2 - \omega^2 + j3\omega}$$

5.70. Verifique la propiedad de diferenciación de la frecuencia (5.56); es decir,

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

5.71. Encuentre la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales:

- a) $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$
- b) $x(t) = \text{sen } \omega_0 t u(t)$
- c) $x(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t u(t), a > 0$
- d) $x(t) = e^{-at} \text{sen } \omega_0 t u(t), a > 0$

5.72. Sea $x(t)$ una señal con una transformada de Fourier $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Considere la señal

$$y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Encuentre el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

5.73. Sea $x(t)$ una señal real con la transformada de Fourier $X(\omega)$. La *señal analítica* $x_+(t)$ asociada con $x(t)$ es una señal compleja definida por

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

donde $\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)$.

a) Encuentre la transformada de Fourier $X_+(\omega)$ de $x_+(t)$.

b) Encuentre la señal analítica $x_+(t)$ asociada con $\cos \omega_0 t$ y su transformada de Fourier $X_+(\omega)$.

5.74. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Encuentre la transformada de Fourier $S(\omega)$ de la respuesta al escalón unitario $s(t)$ del sistema.

5.75. Considere el filtro RC mostrado en la figura 5-38. Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de este filtro y discuta su tipo.

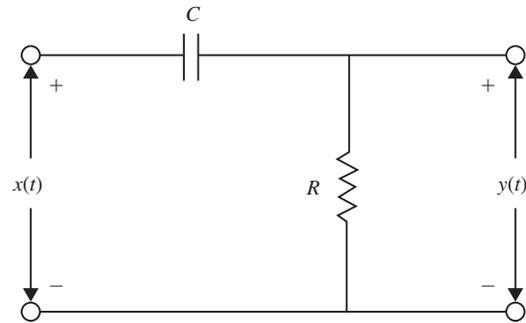


Figura 5-38

5.76. Determine el ancho de banda de contenido de energía al 99% para la señal

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

5.77. El *teorema de muestreo en el dominio de la frecuencia* establece que si una señal real $x(t)$ es de duración limitada, es decir,

$$x(t) = 0 \quad |t| > t_M$$

entonces su transformada de Fourier $X(\omega)$ puede determinarse de manera unívoca a partir de sus valores $X(n\pi/t_M)$ para una serie de puntos equidistantes espaciados entre sí en una cantidad π/t_M . De hecho, $X(\omega)$ está dada por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{t_M}\right) \frac{\text{sen}(\omega t_M - n\pi)}{\omega t_M - n\pi}$$

Verifique el teorema de muestreo anterior en el dominio de la frecuencia.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.61. a) $X(t)$ se grafica en la figura 5-39 y $T_0 = 1$.

$$b) \quad x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{jk2\pi t}$$

$$c) \quad x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k2\pi t$$

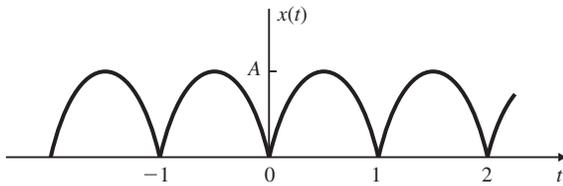


Figura 5-39

5.62. $x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$

5.63. $x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

5.64. *Sugerencia:* Vuelva a escribir $a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t$ como

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left[\frac{a_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \cos k\omega_0 t + \frac{b_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \operatorname{sen} k\omega_0 t \right]$$

y haga uso de la fórmula trigonométrica $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$.

5.65. *Sugerencia:* Use la identidad de Parseval (5.21) para la serie de Fourier y la ecuación (5.168).

5.66. *Sugerencia:* Repita la propiedad de diferenciación en el tiempo (5.55).

5.67. $Ad \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega d/2)}{\omega d/2} \right]^2$

5.68. *Sugerencia:* Haga la diferenciación de la ecuación (5.155) N veces con respecto a a .

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} e^{-at} u(t)$$

5.69. *Sugerencia:* Note que

$$2 - \omega^2 + j3\omega = 2 + (j\omega)^2 + j3\omega = (1 + j\omega)(2 + j\omega)$$

y aplique la técnica de la expansión en fracciones parciales.

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

5.70. *Sugerencia:* Utilice la definición (5.31) y proceda de manera similar a la del problema 5.28.

5.71. *Sugerencia:* Haga uso de la propiedad de multiplicación (5.59).

a) $X(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

b) $X(\omega) = \frac{\pi}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2j} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{\omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

c) $X(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

d) $X(\omega) = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

5.72. *Sugerencia:* Emplee la identidad de Parseval (5.64) para la transformada de Fourier.

$$1/3 \pi$$

5.73. a) $X_+(\omega) = 2X(\omega)u(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

b) $x_+(t) = e^{j\omega_0 t}$, $X_+(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

5.74. *Sugerencia:* Utilice la ecuación (2.12) y la propiedad de integración (5.57).

$$S(\omega) = \pi H(0) \delta(\omega) + (1/j\omega) H(\omega)$$

5.75. $H(\omega) = \frac{j\omega}{(1/RC) + j\omega}$, filtro pasa-altas

5.76. $W_{99} = 2.3/a$ radianes/segundo o $f_{99} = 0.366/a$ hertz.

5.77. *Sugerencia:* Expanda $x(t)$ en una serie compleja de Fourier y proceda de manera semejante a la del problema 5.59.